UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE GOIÁS
CURSO DE MATEMÁTICA

AS APLICAÇÕES DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA E SUA INVERSA

Paulo Henrique Alves Batista

GOIÁS, 2014

PAULO HENRIQUE ALVES BATISTA

AS APLICAÇÕES DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA E SUA INVERSA

Monografia apresentada ao curso de Matemática da Universidade Universitária de Goiás – UEG, como um dos requisitos para a obtenção do grau de licenciatura plena em Matemática.

Orientadora: Profª.Me. Rejane Alves de Souza Tiago

GOIÁS, 2014

Paulo Henrique Alves Batista

AS APLICAÇÕES DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA E SUA INVERSA

Trabalho de Curso apresentado ao Curso de Matemática da Universidade Estadual de Goiás, da Unidade Universitária de Goiás como um dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 21 de novembro de 2014.

Comissão Examinadora

RTiago

Profº Esp. Rejane Alves de Souza Tiago – orientadora
UEG/ Câmpus Goiás

Liliane de O. souza

Profº Esp. Liliane de Oliveira Souza
UEG/ Câmpus Goiás

Rodrigo Bastos Daúde

Profº Ms. Rodrigo Bastos Daúde
UEG/ Câmpus Goiás

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, ao meu pai, minha mãe, minha irmã, minha namorada e a minha orientadora.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado força, humildade e sabedoria para concluir essa pesquisa, porque sem ele sei que seria impossível realizar esse sonho.

Agradeço aos meus pais e minha irmã por ter dado força nos momentos mais difícil e principalmente por acreditar no meu potencial.

Aos meus amigos por ter me dado apoio e passado confiança e para conseguir realizar essa jornada.

Não posso esquecer de todos os funcionários da Biblioteca da Unidade e saibam vocês que sou eternamente grato por ter me ajudado na procura incessante de materiais para realização desse trabalho.

A todo corpo Docente da Unidade Universitária de Goiás do Curso de Matemática e em especial a professora Lilian de Geografia pela bibliografia indicada, a Liliane Oliveira pelas considerações feitas na minha pesquisa; a todos os meus professores quero deixar claro que sem vocês não conseguiria alcançar o conhecimento que tenho hoje, e principalmente, a minha orientadora Rejane Alves de Souza Tiago agradeço a Deus a todo momento por ter enviado você no meu caminho, não podia ter encontrado pessoa melhor para me orientar.

Aos meus amigos do Colégio Monteiro Lobato, aos meus alunos meus reconhecimentos e sei que Deus abençoará todos vocês de forma muito especial. Em especial ao Douglas Tadeu, Daiana Parreira, Fabiane Cunha, Karolina Brito, Eva Simone, Fernanda Pedrosa, Nariel Arruda, Raquel Moreira pelas contribuições dadas para realização deste trabalho.

A minha segunda família que é todos meus amigos do ônibus, ao motorista Irley guardarei a amizade de todos para sempre e compreendam que o apoio de vocês foram de suma importância.

Vale ressaltar a importância dos que caminharam junto comigo e estes são meus amigos de sala de aula, agradeço do fundo do meu coração por tudo que fizeram por mim, e quero deixar claro que as contribuições de vocês serão inesquecíveis.

Portanto, a todos meus amigos, parentes, professores, alunos que torceram por em mim para o térmico dessa etapa, serei eternamente grato pela confiança que depositam em minha pessoa.

Muito obrigado!

A Matemática se revela em mentes sensíveis, capazes de ver uma espiral em um girassol, ângulos em uma estrela e Deus no infinito.

MANOEL RODRIGUES PAIVA

RESUMO

Esta monografia apresenta um estudo descritivo da aplicação da função logarítmica e sua inversa. O tema foi escolhido devido a sua singularidade nas suas propriedades, que por sinal são conhecidas teoricamente, porém pouco conhecida na vida cotidiana. Com objetivo de desenvolver a visibilidade dessas funções o instrumento usado para tal ação foi uma pesquisa bibliográfica e qualitativa. Buscou-se através desta pesquisa mostrar as praticidades que essas funções promovem na análise de situações do dia a dia. Realizou-se um estudo que abrangeu várias áreas do conhecimento como: Química, Biologia, Geografia e entre outras, em que essas funções possuem aplicabilidades com o intuito de mostrar a versatilidade das mesmas, e tudo isso com o objetivo de evidenciar sua utilidade no entendimento de várias situações cotidianas. Poderá neste trabalho, visualizar uma série de aplicabilidades das funções logarítmicas e sua inversa e um estudo detalhado da sua teoria, e posteriormente, contemplará com as demonstrações matemáticas de cada e juntamente com as explicações de cada coeficiente descrito no modelo matemático da situação. A visibilidade do modelo é de suma importância por que a partir das relações demonstrados foram resolvidos exemplos. Nos exemplos foram destacadas as funções implícitas e explícitas através da demonstração matemática do modelo. No entanto, independente da forma na qual acontece sua manifestação percebe-se que nos dois tipos atuam em nossas vidas desempenhando um valor fator relevante para o entendimento de alguns fenômenos. Porém, sabe-se que a função logarítmica e sua inversa de pode agir em nosso cotidiano de forma direta ou indireta, seja na compreensão de uma situação do dia a dia ou até mesmo na compreensão de um fenômeno natural ocorrido.

PALAVRAS – CHAVE: Função Logarítmica; Inversa; Aplicabilidade; Manifestação; Cotidiano.

ABSTRACT

This monograph shows a descriptive study of theapplication of logarithmic function and its inverse. The theme was chosen due to the singularity of its properties, which for some reason are theoretically known, however little known on the everyday life. With the porpoise of developing the visibility of these functions, the instrument used for such action it was a bibliographic research with a qualitative description. The aims of this research is to show the practicalities that these functions promote in the analyze of day to day situations. It was held a study, which covered many areas of knowledge as: quemistry, biology, geography and others, and these functions have aplicabilities with the intention of showing the versatility of them, with the porpoise of evidencing its utilities on the understanding of many daily situations. A lot of aplicabilities of the logarithmic functions and its inverse may be seen in this work and also a detailed study of its theoretical, and later it will be referred with math demonstrations of each model(when possible) together with the explanation of each coefficient described in the model mathematical situation. The visibility of the model it is so important because through the shown relations some examples were resolved. At this example, it was outstanded the implicit and explicit function through the mathematical model demonstration (when possible). But, regardless of how its manifestation happens it is visible that both kinds act in our lives playing a relevant factor to the understanding of some phenomenons. Nevertheless, we know that the logarithmic function and its inverse can act directly or indirectly in our daily life even in a comprehension of a day to day situation or in the comprehension of a natural phenomenon.

Key words: logarithmic function, inverse, applicability, manifestation, everyday.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho monográfico foi feito um estudo sobre algumas aplicabilidades da função logarítmica e sua inversa para que haja a compreensão da sua utilidade no nosso cotidiano.

A matemática é uma ciência notável no cotidiano, entretanto, dentre os seus diversos tópicos, existem aqueles que possuem uma aplicabilidade mais implícita, mas que é de suma importância para compreendermos o comportamento de fenômenos naturais e até mesmo do nosso dia-a-dia.

Para a construção deste trabalho monográfico foi utilizado a pesquisa bibliográfica, pois o objetivo será de destacar como e quais os casos comprovados de aplicabilidade da função logarítmica e sua inversa constam em nosso meio e, principalmente, reconhecer os principais teóricos de relatam sobre esse assunto.

Vale destacar que essa pesquisa é do tipo qualitativa, cuja descrição será realizada por meio de abordagens nas quais deixará explícitas as características das funções estudadas com o intuito de evidenciar as influências relevantes para nosso dia a dia.

O que motivou essa inquietação em conhecer de forma mais profunda as aplicações da função logarítmica e sua inversa foi o fato da mesma se manifestar de forma discreta e em algumas situações quase imprescindíveis. Isso ocorre devido à falta de conhecimento acerca do assunto, o que gera um pré-conceito diante da sua utilização no meio cotidiano, isso por que essas possuem duas formas de manifestação, a implícita e a explícita como ressalta por Macarini (2007).

Devido esses tipos de manifestações, a identificação das aplicações podem ser de difícil visualização, pelo fato desta temática exigir do observador um maior conhecimento matemático acerca das propriedades dessas funções. Mas isso não o impede de reconhecer a aplicabilidade das mesmas, através de diversas áreas do conhecimento como: Química, Física, Geografia, Reino animal e outros e isso relatado juntamente com Gimenes (2006), Bertolino (2005), Pupim (2013), Sodré (2003) que comprovaram a utilidade dessas funções em questão sua atuação em variados tópicos de diversas áreas do conhecimento.

O primeiro capítulo ressaltará os tipos de manifestação de cada função e as maneiras em que os casos de aplicabilidade influenciam em situações que utilizam as suas propriedades, enfatizando a importância de conhecer as áreas do conhecimento que possuem aplicações dessas funções para entender a importância das mesmas para nossa vida cotidiana e interpretar os acontecimentos ou as manipulações deste tipo de função de acordo com concepção de Fonseca (2013).

Por conseguinte, o segundo capítulo, destaca os tipos de aplicabilidade presentes em várias áreas do conhecimento, por meio de uma abordagem objetiva sobre cada um dos casos selecionados, destacando a sua manifestação e utilidade no meio cotidiano. E o mesmo será construído juntamente com os autores de escreveram sobre os casos de aplicabilidades em várias áreas do conhecimento: Mathias (2009) e Sodré (2003).

Por fim, no terceiro capítulo serão explorados os modelos matemáticos que representam cada caso de aplicabilidade relatado no capítulo anterior, destacando a origem das relações matemáticas através de suas demonstrações feitas juntamente com Odum (2001), Pereira (2006), Bronson e Costa (2008) e demais e a partir destas, as possíveis explicações do surgimento de cada coeficiente do modelo e finalizando com exemplos de aplicações sobre o tópico.

1. CONTRIBUIÇÕES DA MATEMÁTICA EM APLICAÇÕES DIVERSAS COM CARACTERÍSTICAS EXPLICÍTAS E IMPLICITAS.

A aplicação da matemática no decorrer do tempo foi ocupando o seu espaço, assim o mundo conscientizou-se da importância da mesma no dia a dia, já que existe uma mobilização em prol da utilização desses mecanismos que proporciona praticidade nas situações cotidianas.

A aplicação matemática pode se manifestar de duas formas: implícitas e explícitas. Para compreendermos melhor como se dá esse processo e principalmente o que é necessário para identificá-lo, vamos compreender o significado de cada termo, de acordo com o Dicionário Dicio (2009 – 2014) o termo explicito significa: “adj. Que está perfeitamente enunciado; claro, preciso, formal [...].” e o termo implícito por sua vez significa: “adj. Que se apresenta de modo obscuro; que está ou permanece subentendido; que não se pode expressar formalmente; não declarado; obscuro, oculto, tácito.”, o que significa que não se vê estas aplicações implícitas com facilidades em meios no qual a mesma se manifesta.

Podemos observar que a manifestação da função pode ser implícita ou explícita, por exemplo, uma aplicação onde a função está implícita é no crescimento populacional de uma colônia de bactérias, na forma geral pode ser caracterizado pela lei de formação algébrica a seguir: $f(t) = b.a^t$, sabe-se que a e b são constantes e que a: fator de crescimento e b: representa a população inicial de bactérias; e t: representa o tempo gasto para a população atingir a quantidade f (t) em bactérias. Para determinar o tempo gasto para obter certa quantidade de bactérias, geralmente utilizamos propriedades da função logarítmica. Por que nem sempre conseguimos aplicar a propriedade de redução de bases iguais, característica da função exponencial, mas percebe-se que a operação dos logaritmos não está presente na função de forma explícita, no entanto há necessidade de obter resultado para t e a operação inversa da função exponencial é a mais adequada para essas situações.

Explicitamente, a função possui um exemplo clássico: a intensidade do som. A mesma é determinada da seguinte forma: $\mathrm{N} = 10.\log\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}$, onde I é a intensidade do som e o I_o é o nível de referência e N nível relativo da intensidade do som referencial (MUCELIN, N. I. S. p.65 – 75, 2006). Aqui podemos visualizar a presença explícita da função logarítmica, por que a sua operação é a própria relação. Macarini (2007) afirma que:

> "A matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma implícita ou explícita. No momento em que abrimos os olhos e olhamos as horas do relógio, fazemos almoço e ainda andamos na rua para fazer compras, estamos exercitando nossos conhecimentos matemáticos." (p. 38, 2007)

Neste trecho, Macarini confirma que estas modalidades de aplicações implícitas e explícitas existentes são utilizadas com o objetivo de exercitar os conhecimentos matemáticos do ser humano em seu dia. Porque frequentemente se depara com objetos e situações que utilizam seus conceitos, mesmo sabendo que em algumas ocorrências seja utilizado de maneira inconsciente por cada cidadão.

Ao abranger o significado dos termos para a matemática como a explicações de fenômenos como crescimento de uma colônia de bactérias por exemplo, percebe-se que existem aplicações de fácil visualização, o que significa que sua identificação é feita de forma mais simples, pelo fato de suas características estarem claras e precisas ou que o tópico que caracteriza a situação é de domínio dos nossos conhecimentos matemáticos. Porém, algumas situações fazem uso de conceitos em que a sua representação é tão sucinta que na maioria das vezes nossos conhecimentos não são capazes de reconhecê-los rapidamente por estarem obscuro, subentendidos ao ponto de termos dificuldades de identificar o tópico que representa determinada situação.

Ao tratar de um assunto tão extenso e aplicável como as funções nos sentimos perdidos nas inúmeras propriedades, e, principalmente na variedade que existem entre as mesmas. Sabe-se que elas se fazem presentes entre as diversas áreas do conhecimento, pois a sua contribuição desempenha um papel de suma relevância para o desenvolvimento das outras áreas do conhecimento como: Biologia, Física, Agronomia, Geografia, Química e outras. Uma vez que apresentamos resultados ou previsões numéricas à visualização é realizada de maneira mais imediata e com melhor compreensão. De acordo com Fonseca (2013, p. 27), as funções: "[...] são uma poderosa ferramenta para representar e interpretar situações, tanto da realidade como da própria Matemática, que envolvam relações entre variáveis."

Isso confirma a relevância das funções para o nosso cotidiano, já que existe um artifício capaz de nos proporcionar uma análise quantitativa quando este processo é feito por meio da representatividade numérica e até mesmo quando a representação numérica é desprezada, seu objetivo é visualizar as causas e os efeitos, devido a isso a pesquisa torna-se uma pesquisa não-métrica, e a junção das duas pesquisas nos proporciona um julgamento com qualidade e exatidão, um tópico que nos oferece essa oportunidade é o das funções.

É nítida a manifestação constante das funções em nosso dia a dia, nota-se que ela está associada à velocidade do seu carro, ao crescimento populacional, no empréstimo bancário, nos voos das aves de rapinas e vários outros. Estes foram alguns exemplos citados para que se possa compreender os diversos fenômenos e consequentemente mostrar traços marcantes dessas funções. Conscientizar que temos uma dependência substancial das suas propriedades, por que os seus conceitos e por sua forma rápida de apresentar resultados das situações que vivenciamos. Esta eficiência faz que pesquisadores se dediquem cada vez mais a explorar as potencialidades que as funções possuem e podem oferecer para o desenvolvimento humano.

Seja qual for a função das funções analisadas, todas possuem um papel primordial para vida, mas por sua singularidade, a logarítmica e sua inversa tornou-se o foco dessa pesquisa, já que é conhecida teoricamente, porém pouco na prática. Na maioria das vezes, a identificação da mesma fica obscura, por ser uma função repleta de preconceitos que são criados no ato da sua primeira abordagem, pelo fato de ter diversas de propriedades e consequentemente, por estar intimamente ligada com a matemática básica, existe sim, uma insegurança em manipular situações que requer os seus conceitos já que um número significativo de pessoas possui dificuldades com a matemática básica. Isso pode ocasionar dificuldades em visualizar essa função no nosso meio, porque as aparições no cotidiano são na maioria das vezes de maneira implícitas e esse reconhecimento só acontece a partir do momento em que o observador possui um certo conhecimento sobre essas funções.

Entretanto, isso não significa que é impossível fazer a sua identificação, na verdade existem diversas ocorrências que faz com que a sua visibilidade seja menor, dentre elas podemos nomear algumas como sendo: a falta de domínio do conteúdo, déficit na analises gráficas de determinadas situações, dificuldade de identificação da sua função inversa e outras.

Quando se fala da função logarítmica não podemos deixar de falar da sua inversão. Esta, por sua vez, é a função exponencial, também possui a sua relevância no meio cotidiano devido a correlação em que ambas possuem na determinação de resultados para situações problemas como o entendimento dos impactos de um crescimento populacional humano ou até mesmo de bactérias, exemplo de um resultado que pode ser obtido. Essa interdependência existente entre as mesmas, acontece, principalmente, em consequência da sua estrutura algébrica, pois o próprio termo diz: uma é a inversa da outra, o que significa que algebricamente possuem uma estruturação na qual a determinação de resultado que uma oferecerá pode vir a recorrer as propriedades da outra devido a busca de praticidade.

Mas, que na maioria das vezes, haverá situações do dia a dia em que não poderemos dispensar o conceito da outra, por exemplo: o regime de capitalização composta, o “famoso” juro composto possui em sua relação uma função exponencial, mas será que todas as situações serão resolvidas apenas com a utilização de propriedade dessa função? Daí que surge a análise implícita dos fatos, pois não é por que a situação é caracterizada por uma função exponencial que não podemos utilizar conceitos da função logarítmica na determinação de alguns resultados. Essa ocorrência surgirá quando buscamos determinar a quantidade de tempo cuja representação do modelo é escrita da seguinte forma: $M = C.(1+i)^t$ou $M = C.e^{it}$, o tempo (t) é uma variável que localiza no expoente e nem sempre o uso da redução de bases iguais poderá resolver e por isso aplicamos a operação inversa, os logaritmos, como artificio para a obtenção dos resultados a fim de analisar os efeitos da aplicação.

Ter conhecimento da função inversa é relevante para realização deste trabalho, pelo fato de existir um elo de ligação forte entre a função logarítmica e a exponencial, mesmo sabendo que alguns casos são autossuficientes, as propriedades da sua inversa aplicada são fundamentais para a determinação dos resultados. Essa ligação entre elas é intensa, mas o intuito é de evidenciar que a sua existência e, principalmente, que as mesmas são indispensáveis para algumas situações cotidianas, pois em algum momento será necessário o gozo das suas propriedades para solucionar situações que porventura surgirá, mas que sozinhos, apenas, com o conhecimento empírico, não somos capazes de elaborar resultados tão precisos comparados ao que elas determinam.

Independentemente da localidade, intensidade e entre outros aspectos de uma determinada situação como por exemplo: abalos sísmicos, podemos dizer que distanciamento não importa, por que sabemos que suas consequências ocasionadas por algumas das suas aplicabilidades podem atingir de alguma maneira nosso meio, sendo estas refletidas diretamente ou indiretamente. Por isso a necessidade de reconhecermos a sua utilidade, por que em algum momento pode surgir à necessidade de conhecer a característica de certo fenômeno ou situação que provavelmente acontecerá, caso não tenha um conhecimento teórico, pelo menos, superficial não conseguirá tecer sugestões e nem imaginar os impactos que poderá provocar por ser uma função desconhecida.

A função logarítmica e a sua inversa possui diversas aplicações e o intuito deste trabalho é evidenciar a sua aparição no cotidiano e principalmente, pontuar as suas características desde a sua construção do modelo utilizado até a sua utilidade prática. Por que não podemos falar dessas funções sem mostrar o quanto as suas propriedades são sustentadas por uma teoria consistente e flexível sendo ela fundamental para as aplicações.

A pesquisa objetiva-se em responder algumas perguntas que só a aplicação não contempla a curiosidade do aplicador, porque usar um modelo matemático sem entender sua utilidade, seus significados ficam impossível alcançar a compreensão. Por isso, será dada ênfase nas demonstrações das relações de cada modelo de aplicação com o intuito de destacar com clareza o motivo de cada aplicação.

Será feita a discussão dos pontos positivos, negativos, consequências, relevância e outras. Afinal, buscaremos fazer um estudo analítico de cada situação pontuando estes aspectos, para assim conhecer a importância dessas funções no meio em que vivemos, mesmo que em alguns momentos esteja distante da sua realidade entenderemos que é necessário o conhecimento da sua teoria para entendermos e prevermos acontecimentos.

A pesquisa realiza-se com o intuito de aproximar a sua aplicação para efeito de conscientização de todos da sua relevância e o quanto a sua criação foi importante para algumas áreas, por que além de oferecer um resultado preciso e menos trabalhosos, é possível fazer uma projeção já que é uma análise mais rápida, devido a forma com que seus resultados são apresentados.

Este estudo analítico será feito nas seguintes situações: Crescimento populacional; Juros compostos; Intensidade do som; Escala Richter e Escala Mercalli; Formato do voo de ataque das aves de rapina; Astronomia (Brilho aparente das estrelas); Potência Hidrogeniônico e Hidroxiliônico (pH e pOH); Decaimento Radioativo do Carbono - 14. Falaremos de cada uma de forma detalhado apontando (quando possível) as seguintes características: Manifestação implícita e explícita; Aspecto positivo e negativo; Sua contribuição para a vida; Demonstração da relação característica e outras;

Nota-se que, será abordado todos os tópicos com detalhes no próximo capítulo, por que nele constará um relato de maneira distinta de cada uma das aplicações e as suas particularidades e consequentemente explorar as suas potencialidades que serão convertidas em concepções que poderão mudar o conceito de muitos sobre essas funções ou que pelo menos conscientizar sobre a utilidade que as mesmas tem no nosso meio e que muitos que não tinha conhecimento dessas aplicações, terão uma outra visão a partir da leitura desse trabalho.

2. DESCRIÇÃO DA APLICABILIDADE DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E SUA INVERSA NAS DIVERSAS ÁREAS

Observa-se de forma explícita e implícita o uso de funções matemáticas em diversas áreas do conhecimento. Ou seja, as funções logarítmicas e exponencial possuem inúmeras situações nas quais estão presentes. Levando em consideração as diversas aplicabilidades dessas funções, já que mesmo sendo descrito de forma sucinta, nota-se suas características, já que as mesmas usam de propriedades particulares onde só elas são capazes de oferecer análises de casos com tal clareza.

O intuito é descrever brevemente cada assunto, pois o principal objetivo é oferecer um conhecimento teórico capaz de demonstrar a oportunidade de conhecer previamente o assunto, uma vez que os exemplos das aplicabilidades serão destacados no próximo capítulo. Vale ressaltar que tudo no que diz respeito a relações, notações serão destacados especificamente no capítulo 3.

2.1 Função Logarítmica, Exponencial: E O Crescimento Populacional

Uma aplicabilidade dessas funções está basicamente centrada nos cálculos de crescimento populacional, podemos observar que a relação que descreve tal fenômeno envolve a função exponencial. O tempo é a variável independente do processo e em casos de determinação de valores para essa variável, na maioria das vezes utiliza-se os conceitos da operação que rege a função logarítmica por que ela é capaz de oferecer respostas rápidas que descreve perfeitamente a situação.

Em uma população cada indivíduo é um elemento, e sabemos que na definição de crescimento populacional podemos esboçar representações matemáticas para descrever tal tópico. É explícita a relação que acontece entre duas grandezas na situação analisada: tempo e número de indivíduos. Assim é fácil visualizar o conceito de função no crescimento de uma população, já que a principal condição foi pré-estabelecida: a relação entre dois conjuntos, por que incessantemente usamos duas grandezas para sofrer análise dos dados oferecidos para o estudo.

Crescimento populacional desfruta das propriedades e definições da função exponencial. Como relatado anteriormente que o número de indivíduos depende do tempo em que foi estabelecida a análise, notamos que o modelo matemático usado deixa em destaque o uso da função exponencial por que uma das grandezas, nesse caso, o tempo está descrito na representação matemática no expoente da relação.

Entretanto, a função exponencial é intimamente ligada à função logarítmica pelo fato de uma ser o inverso da outra. Compreende-se que de forma implícita os conceitos da operação da função logarítmica, pois ela possui propriedades capazes de determinar valores/ resultados para situações como esta, no qual o tempo é a nossa grandeza em questão.

Portanto, o principal objetivo é entender essa representação matemática, e a utilização no estudo dos padrões de crescimento que por sua vez a função exponencial e logarítmica atua na caracterização e obtenção de respostas para o comportamento de tal fenômeno.

2.2 Juros Compostos E Sua Relação Com As Funções Exponencial E Logarítmica.

O regime de capitalização composta ou juros compostos como são mais chamados é um tópico da matemática financeira que estabelece um modelo matemático que descreve a capitalização no mercado financeiro, como afirma Ferreira relata que:

> “Não há necessidade de falarmos da importância dessa forma de capitalização no mercado financeiro, tendo em vista o seu enorme uso nas operações de curto, médio e longos prazos e nas transações de ativos que englobam aplicações/ captações de poupanças.” (p. 77, 2008)

Como o mundo todo de forma direta ou indireta, já entrou ou entrará em contato com os juros compostos até por que, ele é o modelo que mais se aproxima com a nossa realidade, como afirma Mathias (p. 81, 2009): “No regime de capitalização, que tem grande importância por retratar melhor a realidade [...].”; pois em geral as operações comerciais pode utilizar na integra sua propriedade ou de forma bem sucinta aproveitando pelo menos o seu conceito básico.

Sabemos que os juros compostos são os também chamados juros sobre juros, no qual o montante do mês anterior torna-se o capital do mês posterior. Para Gimenes:

> "No regime de capitalização composta também se paga juros sobre o valor presente P, mas com uma pequena e importante diferença: o valor inicial deve ser corrigido período a período. Essas correções são sobrepostas e sucessivas por n períodos em função de uma taxa de juros contratada." (p.26, 2006)

Seu conceito vem ao encontro ao de Mathias completamente ao ressaltar que:

> "[...] o juro gerado pela aplicação será incorporado à mesma passada a participar da geração de juros no período seguinte. Dizemos então que os juros são capitalizados, e como não são só o capital inicial que rende juros mas estes são devidos também sobre os juros formados anteriormente, temos os juros compostos." (p. 81, 2009)

Segundo a afirmação acima, que o juro sobre juro só acontece graça ao modelo matemático usado que é uma função exponencial. O montante desfruta da propriedade de uma função no qual a variável explicativa situa-se na potência, deixando explicitamente a sua presença. Então, notamos que o juro aumenta de acordo com o tempo, pois se o tempo é o expoente, a potenciação é definida como sendo uma multiplicação de fatores iguais, logo podemos concluir que o aumento exacerbado do montante é graças a variável tempo, pois a mesma está efetivando a quantidade de vezes que tal taxa incidirá no capital e consequentemente, contribui com o aumento rápido do seu valor futuro[1].

Vale ressaltar que os logarítmicos estão implicitamente relacionados com os juros compostos, por que caso tenhamos um montante onde não sabemos o tempo no qual esse capital foi aplicado, utilizamos das propriedades da função logarítmica para a determinação daquela incógnita exposta na sentença analisada, por que essa operação é a única que conseguimos obter resultados rápidos e preciso para a situação específica.

2.3 A Relação Entre A Intensidade Do Som E A Função Logarítmica.

---

[1] Valor de face, valor nominal são denominações atribuídas a variável montante.

A intensidade do som trata-se de um assunto onde a presença da função logarítmica é clara, pois a mesma torna-se indispensável para a determinação do nível de intensidade sonora. Entende-se que a palavra logaritmo significa: razão, relação; ou seja, utiliza-se a operação dessa função com o intuito de estabelecer uma correlação entre a intensidade sonora analisado e a intensidade referencial que nada mais é, que um parâmetro que consiste no menor nível audível pelo ser humano.

Em situações bem sucintas, leva-se em consideração os conceitos das propriedades da função exponencial, por que na maioria das vezes, busca-se valores para o nível de intensidade sonora, mas é obvio que existem casos onde sabe-se a intensidade sonora de determinado som, daí procura-se recursos que ofereça resultados precisos e rápidos e essas respostas são encontradas por meio das propriedades da função exponencial visto que é a sua inversa que rege a relação do nível de intensidade sonora.

2.4 Escala Richter E Mercalli E O Seu Envolvimento Com A Função Logarítmica.

A escala é uma representação matemática feita numericamente utilizada em prol de uma visualização proporcional a realidade vivida. Escala Richter é a escala usada para medir a intensidade dos abalos sísmicos que ocorrem no interior da Terra e exibem seus impactos na região externa da Terra.

É sabido que o terremoto ou sismo para Luiz Carlos Bertolino é definido como sendo: “[...] é qualquer vibração na crosta e que tem origem no seu interior. Quando a vibração é relativamente intensa, o tremor de terra se torna perceptível aos nossos sentidos.” (p.15, 2005)

O cientista americano Charles Francis Richter criou a escala responsável pela medição da intensidade dos abalos sísmicos (tremores, terremotos) no ano de 1935 (BERTOLINO, p. 17, 2005). Há uma presença constante da função logarítmica já que ela compõe predominantemente a relação que determina a magnitude dos terremotos, pois como a operação dessa função tem como principal objetivo estabelecer relação entre grandezas e explorar a mesma para relacionar a frequência e amplitude dos abalos, para assim, obter um parâmetro ou pelo menos um referencial para descrever a magnitude de seu impacto.

Nesse sentido para analisar a intensidade dos impactos não temos apenas a escala Richter, pode-se usar escala Mercalli, outra escala feito com o mesmo objetivo determinar parâmetros mediante a impactos (abalos sísmicos) que aconteceram, para que haja uma documentação capaz de oferecer dados para aqueles que buscam estudar cada vez mais esse tipo de fenômeno que interfere diretamente na vida de qualquer ser humano, independente da sua situação financeira, politica, religiosa e entre outras; pode sofrer com as consequências que um abalo sísmico é capaz de fazer.

Ao analisar a escala Mercalli, nota-se que a mesma é de cunho qualitativa por estabelecer resultados a partir dos impactos que a superfície terrestre sofreu, em síntese, a sua resposta em relação à intensidade do terremoto é feito de acordo com o olhar humano. Isso mostra um dos seus aspectos negativos da escala Mercalli por que seus resultados são obtidos por meio de uma análise feita por seres humanos, ao realizar-se no conceito da visão humana, a mesma poderá ser submetida por uma série de fatores, os quais fazem com que suas averiguações (determinações) estão extremamente vulneráveis a variação pela certeza que cada ser vivo é diferente do outro e além disso, cada um tem uma visão a ser defendido perante a situação na qual é submetida. Por isso utiliza-se mais a escala Richter, por que nela, temos uma margem de erro, mas nada que seja discrepante, uma vez que os resultados são obtidos por cálculos matemáticos.

2.5 O Conceito Da Função Logarítmica Presente No Reino Animal

A função logarítmica é vivenciada por todos nós, como já mostramos anteriormente e até mesmo no reino animal, por meio da espiral logarítmica, a mesma é uma curva onde o seu formato não se altera de acordo com o seu crescimento. Um exemplo seria de um dos animais que fazem uso desse conceito que é o falcão peregrino. Este por sua vez, é uma ave de rapina que costuma realizar voos em grandes altitudes e que possuem uma ótima visão. A visão e a matemática são extremamente importantes para esta ave, pois caso não existisse a sua sobrevivência estaria em risco, porque depende de conceitos matemáticos empíricos que ao ser seguido corretamente o ataque é infalível e a sua alimentação é garantida.

Ao seguir a curva nota-se que o animal dirigiu-se a sua presa usando o mesmo ângulo que a avistou a vítima e mesmo sabendo que em linha reta a trajetória seria menor o uso desse formato o ajudará a ter uma maior probabilidade de sucesso em sua caçada, pois o animal que torna-se seu alvo acaba tendo pouca saída, pelo fato do falcão estar cercando sua caça até que não haja mais saída, e enfim a efetivação da captura da sua presa. (PUPIM, p.37, 2013.)

2.6 Potencial Hidrogeniônico E Potencial Hidroxiliônico (pH E pOH) E A Função Logarítmica.

Além de existir diversas aplicações da função logarítmica e da sua inversa, constata-se que na química não é diferente, por que a quantidade de H^+[2] e OH^-[3] medida com a utilização das funções logarítmicas é de suma importância, pois eles são os responsáveis por determinar a real situação em que se encontra uma solução aquosa, seja ela, alcalina (base) ou ácida.

Dentro desta ótica, percebe-se que é importante ter conhecimento do nível em que o índice situa-se, já que alguns seres vivos dependem tanto desse controle, como por exemplo, os peixes. Para que tenham um bom desenvolvimento corporal e reprodutivo o PH da água deve estar no intervalo de 6 a 8.

Um tópico que estuda a quantidade existente em certa substancia é a concentração. Conta-se que um químico fazia-se um experimento em uma cervejaria e ele descobriu que a concentração de $[H^+]$ é dada pela relação: $[H^+] = 10^{-x}$. Mas, para chegar nessa relação, é sabido que realizou diversos experimentos e notou que o expoente da concentração tinha como valor da potência um número negativo segundo WEYNE (2007).

Nesse sentido, criou-se o Potencial Hidrogeniônico $pH = -\log[H^+]$ e Potencial Hidroxiliônico $pOH = -\log[OH^+]$, por uma série de motivos, dentre eles: facilidade, acessibilidade, praticidade, simplificação, segurança e outros. A facilidade é explícita, por que com a utilização da operação da função logarítmica usa-se com menor frequências números decimais com muitos zeros a esquerda e quando utilizado são números maior de fácil manipulação (GAMA e AFONSO, p.2, 2007).

A análise tornou-se mais acessível ao utilizar uma escala, pelo fato do criador Sören P. T. Sörensen (1868-1939), bioquímico dinamarquês (GAMA e AFONSO, p.2, 2007) ter consciência que nem todos têm conhecimento suficiente para determinados conceitos matemáticos como: manipulação de números negativos, números decimais muito pequenos e outros; e simultaneamente, a praticidade e simplicidade é vista a partir do momento de ter escolhido uma operação que goza de propriedades simples e oferece resultados resistentes e fáceis de serem visualizados na situação real analisada.

---

[2] Íon que determinar se o meio aquoso está ácido.
[3] Íon que determinar se o meio aquoso está alcalino (básico).

2.7 Brilho Aparente Das Estrelas E Sua Proximidade Com A Função Logarítmica E Sua Inversa.

As funções são tópicos indispensáveis para o estudo matemático e até mesmo para o meio cotidiano porque encontramos conceito da função logarítmica na determinação do brilho aparente de uma estrela, pode parecer inacreditável, porém é verdade. Há muitos anos buscava-se provar que o sol também era uma estrela, no entanto não havia provas cabíveis e convincentes comprovar essa afirmação, daí iniciou-se o estudo do brilho aparente por que ele seria o início dos arquivos para comprovar essa afirmação.

Nota-se que algumas buscaram, como: Hiparco de Samos e assim após muitos estudos chegar a uma relação. Neste sentido, pode observar explicitamente que a presença da função logarítmica, a mesma sendo utilizado por saber que um de seus mecanismos e estabelecer a relação entre grandezas. Sabe-se que as estrelas são consideradas de acordo com o seu brilho, utilizando um mecanismo: escalas de magnitudes (ZAVALA, p.6, 2013.).

Entretanto, vale enfatizar que não é o fato de estar presente a função logarítmica que a função exponencial será deixada de lado não, em alguns momentos recorre-se aos seus conceitos até por que quando buscarmos a determinação de valores para o Fluxo (intensidade) teremos como artifício matemática mais acessível para a busca deste valor a equação exponencial, já que faz-se apenas o processo inverso que é sair de uma operação logarítmica e trabalhar a função exponencial para trabalhar a propriedade de redução dos membros para a mesma base.

2.8 Decaimentos Radioativo E Seu Envolvimento Com A Função Exponencial E Logarítmica

Inicialmente deve-se ressaltar que o estudo do decaimento radiativo foi uma grande descoberta para os arqueólogos, visto que por meio dele, que é estabelecida uma datação aproximada da existência de um determinado fóssil encontrado. Perceberam que os materiais radioativos sofriam desintegração de maneira proporcional à quantidade inicial de massa desse material (SODRÉ, p.46, 2003). Determinaremos a quantidade de massa final quando temos conhecimento da constante de decaimento, pois ela é a responsável e tem um papel primordial para a obtenção da massa final, já que quando não conhecemos a constante de decaimento recorremos para o conceito de meia vida.

A meia vida de um material radioativo consiste em um intervalo de tempo que tal material precisa para desintegrar metade da sua quantidade inicial de massa desse material. Portanto, ao conhecer a meia vida do elemento radioativo, podemos a partir dela, elaborar uma constante, ou o contrário (SODRÉ, p.46, 2003). Um exemplo mais clássico é a da utilização do Carbono-14, o mais utilizado e indispensável para os arqueólogos em seus testes.

3. CASOS COMPROVADOS DA APLICABILIDADE DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

A partir de agora, segue as representações matemáticas de cada aplicabilidade da função logarítmica e exponencial descritas anterioriormente. Vale ressaltar que no capítulo 2 foi realizado um breve relato sobre cada uma das áreas do conhecimento em que utilizam a aplicação de forma explícita ou implícita da aplicabilidade da mesma neste trabalho, será feita todas as demonstrações (quando possível) para caracterizar as origens de cada relação e principalmente para comprovar a manifestação implícita ou explícita citada no capítulo anterior.

Percebe-se que utilizaremos operação de derivada, integral, mas as operações feitas com elas serão somente para a determinação da função em estudo, até por que elas não compõem o foco da pesquisa.

Além disso, todas elas serão seguidas de exemplos cotidianos nos quais servirão para comprovar a sua utilidade e principalmente, evidenciar a proximidade dessa função que na maioria das situações não são vistas as suas qualidades pelo fato de antes mesmo de manipulá-la tecem vários mitos e pré-conceitos sobre a sua função e operação da função logarítmica e sua inversa.

3.1 Função Logarítmica, Exponencial: E O Crescimento Populacional

Na biologia, a função exponencial é relevante, como já foi relatado, pois o fenômeno do crescimento populacional é descrito por meio da definição dessa função.

Nota-se que existem dois tipos principais de crescimentos populacionais: o exponencial e o logístico. O exponencial é a que feito de forma mais independente sem sofrer influência da densidade[4] da população, ao contrário do logístico que considera todas essas influencias inclusive o tamanho da população.

A seguir, a demonstração das relações matemáticas que representam cada tipo deste fenômeno.

[4] Decorrem do tamanho da população.

Considere:

P: quantidade de indivíduos em determinado instante de tempo.

P_0: quantidade inicial de indivíduos.

t: tempo de análise.

N: nascimentos.

M: mortes.

E: emigração[5].

I: imigração[6].

Sendo P a densidade final da população em um dado instante t, notamos que a derivada é a uma representação de taxa de variação, isso significa que $\frac{dP}{dt}$ a quantidade de indivíduos a cada instante t, por meio da definição de derivada obtém-se que: $\lim_{t \to t_0} \frac{P - P_0}{t - t_0} = \frac{dP}{dt}$.

Porém para chegar a essas conclusões deve-se analisar que uma população para atingir determinado aglomerado de indivíduos sofre uma série de influencias, como: a entrada e saída de seres do grupo, mortes e nascimentos são os principais fatores que interferem diretamente na constituição do conjunto.

Entretanto, é importante destacar que no crescimento populacional exponencial, a entrada e saída é desconsiderada, e isso faz com que este modelo seja utilizado frequentemente em colônias de bactérias o que significa que o mesmo descrever mais situações laboratoriais, no qual a ação humana é um fator determinante na formação desse grupo, por isso, percebe-se que o número de indivíduos de um dado instante de tempo surge a partir da diferença entre os nascimentos e mortes ocorridas nessa população, então:

$$\frac{dP}{dt} = N - M \tag{1}$$

A derivada é uma taxa de variação. Para aplicar esse conceito é necessário o conhecimentos das taxas percentuais de mortes e nascimento em relação ao número de indivíduos deste grupo, assim, seja n e m respectivas taxas percentuais de natalidade e mortandade, no qual foram determinados por meio da razão, descrita a seguir:

---

[5]Indivíduos que saem do grupo.

[6]Indivíduos que entram no grupo.

$$n = \frac{Número\ total\ de\ nascimentos}{Total\ de\ individios\ da\ população}$$

$$m = \frac{Número\ total\ de\ mortes}{Total\ de\ individios\ da\ população}$$

Então:

$$n = \frac{N}{P} \Rightarrow \quad N = nP$$

$$m = \frac{M}{P} \Rightarrow \quad M = mP$$

Substituindo os valores de N e M, em função de suas taxas percentuais, temos que:

$$\frac{dP}{dt} = nP \ - mP$$

Logo:

$$\frac{dP}{dt} = (n \ - m)P$$

O tipo de equação acima é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem ser resolvida pelo método de separação de variáveis, por que o intuito de nosso estudo e de determinar a família de função que descreve esse modelo e, além disso, mostrar como são responsáveis pela obtenção daqueles números totais de indivíduos de certa população, e também que o fator $(n \ - m) = r$ que também denominado como taxa intrínseca (PERONI,. HERNÁNDEZ, p. 65, 2011), por isso a sua resolução a seguir será assim:

$$\frac{dP}{dt} = rP \ (limite\ definido\ em\ P)$$

$$\frac{dP}{dt} - rP = 0$$

$$\frac{dP}{dt}.dt - (rP).dt = 0.dt$$

$$[dP - (rP).dt = 0.dt\ ] \div P$$

$$\frac{1}{P}.dP - rdt = 0.dt$$

$$\int \frac{1}{P}.dP - \int r\,dt = \int 0\,.dt$$

$$\ln|P| - rt = c$$

$$ln|P| = rt + c$$

$$|P| = e^{rt+c}$$

Como o número de indivíduos de uma população é sempre positivo, logo sua relação é descrita da forma:

$$P(t) = e^{c}.e^{rt}$$

Sendo que no instante t = 0, temos a população inicial representado por P_0, então podemos destacar que: P(0) = P_0, em consequência dessa generalização pode-se representar o crescimento populacional da forma mais usual, por isso:

$$P(0) = e^{c}.e^{r.0} \ \Rightarrow\ P(0) = e^{c}.e^{0} \ \Rightarrow\ P(0) = e^{c}.1 \ \Rightarrow\ \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}_0 = e^{c}$$

Conclui-se, então que:

$$P(t) = \mathrm{P}_0.e^{rt} \tag{2}$$

Dentro dessa ótica, esse tipo de relação é utilizado corriqueiramente em estudos laboratoriais e para o ser humano são utilizados em casos mais específicos, o que concluímos um dos aspectos negativos do modelo, por que sua estruturação descreve apenas uma análise limitada e assim, não pode-se utilizá-lo para descrever o crescimento da população humano por exemplo.

A seguir, um exemplo no qual este modelo matemático é utilizado no cotidiano.

Situação problema 3.1.1

Em laboratório, um pesquisador fazendo estudo sobre certo tipo de bactéria, pode observar que a cada minuto que se passava havia uma duplicação. Sabe-se que o seu estudo partiu de uma bactéria, e este pesquisador busca fazer uma projeção da quantidade futura de bactérias em certo intervalo de tempo, de tal forma que considerando que não ocorre qualquer interferência que impeça um fluxo constante de crescimento como seria um modelo matemático para essa situação.

Resolução:

Note que quanto o tempo *t=0* minutos, a colônia tinha apenas 1 indivíduo, isso significa que *P(0) = 1,* então:

$$P(0) = \mathrm{P}_0 . e^{r(0)}$$
$$P(0) = \mathrm{P}_0 . e^{0}$$
$$P(0) = \mathrm{P}_0$$
$$P(0) = 1 \ = \mathrm{P}_0$$

Conclui-se que: $P_0 = 1$, logo:

$$P(t) = e^{rt}$$

E explícito que a duplicação acontece a cada minuto, no entanto pode – se afirmar que P(1) = 2; P(2) = 4 e assim sucessivamente, então:

$$P(1) = \mathrm{P}_0 . e^{r(1)}$$
$$e^{r} = P(1) = 2$$
$$e^{r} = 2$$

É neste instante em que não consegue-se perceber a função logarítmica, mas agora como método de resolução será utilizada, por que ela possui propriedade que fazem com que a variável saia da potência e parase tornar base, o que nos ajuda muito na sua determinação é uma propriedade logarítmica, que em seguidaserá demonstrada a propriedade que realiza tal ação e posteriormente o restante da resolução.

Propriedade 1:

$$\log_b a^n = n . \log_b a \tag{3}$$

Demonstração:

Sabe-se que, por hipótese:

$$\log_b a = x \iff b^x = a$$

Obter um termo igual a a^n, então se elevarmos ambos os membros da a equação exponencial acima por n, temos:

$$(b^x)^n = a^n$$
$$b^{nx} = a^n$$

Escrevendo a equação exponencial em forma de logaritmo, que:

$$\log_b a^n = n.x$$

Mas por hipótese, $\log_b a = x$, consequentemente:

$$log_b a^n = n. log_b a$$

(c.q.d)

Agora, dando continuidade à resolução, e utilizando a propriedade demonstrada acima, logo:

$$r. log_e e = log_e 2$$

Aplicando a propriedade 1, conclui-se:

$$r. log_e e = log_e 2$$
$$r = log_e 2$$

Logo:

$$P(t) = e^{(log_e 2)t} = e^{(\ln 2)t}$$
$$P(t) = e^{(\ln 2)t}$$

Portanto, o modelo que descreve a situação, é o seguinte:

$$P(t) = 2^t$$

É em momentos assim, que a aplicabilidade das funções logarítmicas e sua inversa podem ser vistas claramente, de maneira concreta e comprovada, sem deixar dúvida da sua utilidade no cotidiano, pois de forma direta ou indiretamente, através do estudo feito com este tipo de organismo que é as bactérias conseguimos ter uma projeção clara e precisa da manifestação e consequentemente, teremos ideia de como seria esse organismo em nosso corpo, caso um ser humano entre em contato com um tipo desse de bactérias.

Já no crescimento populacional logístico, a analise pode ser mais detalhada até por que seu modelo é descrito de forma que leva em consideração os principais fatores que determinam o crescimento de um tipo de população, e esse modelo pode ser utilizado para caracterizar o crescimento da população humana.

Neste caso, os itens analisados são: emigração e imigração. Isso significa que no modelo que será demonstrado a seguir leva em consideração na analise a entra e sai da de indivíduos do grupo estudado. Além disso, estende a avaliação as influencias sofridas pela taxa de natalidade e de mortalidade dos indivíduos desse grupo observado.

Segui a demonstração do modelo de crescimento logístico e simultaneamente a curva sigmoide, a que descreve graficamente este modelo, então:

É sabido que neste evento tem-se uma limitação que é o número de indivíduos dessa população. Aqui verifica-se três fases distintas de acordo dom Odum (p. 292, 2001), que são:

Fase 1: crescimento populacional lento, ela constitui-se na fase de estabelecimento no qual sua aceleração é positiva.

Fase 2: crescimento populacional rápido, ela constitui-se de um aumento tal, que aproxima-se de uma curva logarítmica.

Fase 3: nesse momento, a população passa por uma desaceleração gradativa de forma que em algum momento tornará constante de acordo com o percentual de resistência ambiental.

O crescimento logístico é uma taxa de variação do número de indivíduos em relação ao intervalo de tempo, como a taxa é descrita por uma derivada, nota-se que pela definição de derivado, tem-se que: $\frac{dP}{dt} = \lim_{t \to t_0} \frac{P - P_0}{t - t_0}$.

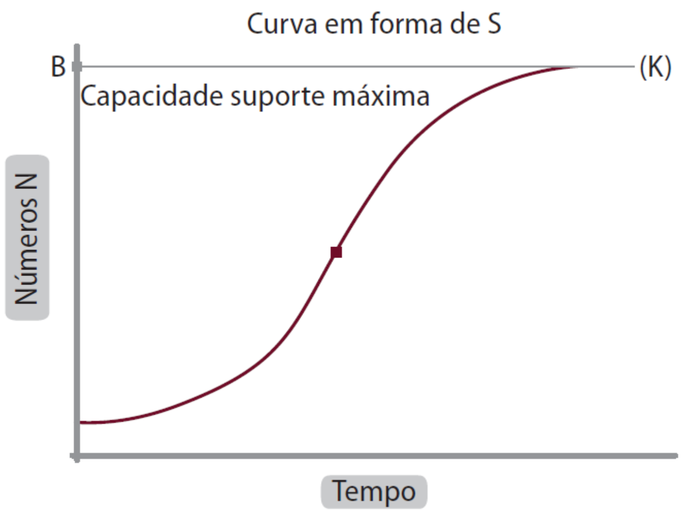
Mas, no logístico a taxa é obtida da seguinte maneira:

$$\frac{dP}{dt} = rP.\left(1 - \frac{K}{P}\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP.\left(\frac{K - P}{K}\right)$$

De acordo com essa vertente, compreende-se que a única diferença existente entre este modelo é que agora será utilizado um fator que representa a taxa máxima de indivíduos que essa população pode obter que é $\left(\frac{K-P}{K}\right)$, onde K é uma constante que representa o quantidade máxima de indivíduos que a população suporta atendendo ao ambiente que estão localizados e comporta-se também como resistência ambiental e graça a essa K (assíntota horizontal) nota-se o motivo que chegar em uma desaceleração gráfica e uma constância no número de indivíduos de uma população.

Veja essa situação no gráfico a seguir:



Fonte: Ecologias de populações e comunidades. PERONI, Nivaldo. HERNÁNDEZ, Malva Isabel Medida. 2011.

Então, aplicando o conceito de integral, tem-se que:

$$\frac{dP}{dt} = rP.\left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int r.dt$$

$$\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int \frac{K}{P.(K-P)} dP$$

Para isolar o valor final da população P, utilizaremos o método de resolução de frações parciais, pois sabemos que o denominador está em forma de um produto daí é cabível a utilização deste método.

$$\frac{K}{P.(K-P)} dP = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P}$$

$$\frac{K}{P.(K-P)} = \frac{A(K-P) + B.P}{P.(K-P)}$$

$$K = A(K-P) + B.P$$

O valor de P deverá receber valores de tal forma, que haja o cancelamento de uma parcela para determinar os valores das constantes A e B. Conclui-se que P = 0 e P = K, então:

Para P = 0, temos que:

$$K = A(K-0) + B.0$$

$$K = AK \Longrightarrow A = 1$$

Para P = K, temos que:

$$K = A(K-K) + B.K$$

$$K = BK \Longrightarrow B = 1$$

Consequentemente:

$$\int \frac{K}{P.(K-P)} dP = \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{1}{K-P} dP$$

$$\int \frac{K}{P.(K-P)} dP = \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{\frac{1}{K}}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP$$

Resolvendo cada parcela do segundo membro da equação acima, então a primeira parcela é a seguinte:

$$\int \frac{1}{P} dP = \ln|P|$$

Resolvendo cada parcela do segundo membro da equação acima, então a primeira parcela é a seguinte:

$$(u)' = \left(1 - \frac{P}{K}\right)' \Rightarrow \frac{du}{dP} = \frac{-(1.K - P.0)}{K^2} \Rightarrow \frac{du}{dP} = \frac{-1}{K} \Rightarrow dP = -Kdu$$

$$\int \frac{\frac{1}{K}}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP = \frac{1}{K} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP = \frac{1}{K} \int \frac{1}{u} (-Kdu) = -\int \frac{1}{u} du = -ln\left|1 - \frac{P}{K}\right|$$

Voltando a equação anterior, teremos que:

$$\int \frac{K}{P.(K-P)} dP = \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{\frac{1}{K}}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP$$

$$\int \frac{K}{P.(K-P)} dP = \ln|P| - ln\left|1 - \frac{P}{K}\right|$$

Então, após a determinação destes valores por meio do conceito de integral, então retomamos a operação inicial que descreve o modelo, nota-se que:

$$\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int r.dt$$

$$\ln|P| - ln\left|1 - \frac{P}{K}\right| = rt + a$$

Percebe-se que os argumentos dos logaritmos serão sempre positivos, pois, P é uma quantidade de indivíduos de uma população e $\left|1 - \frac{P}{K}\right|$ neste argumento é explicito que representa o limitante como a população não pode ultrapassar sua capacidade máxima devido aos fatores de resistência, sempre será positiva, portanto, não há necessidade de utilizarmos módulos desses argumentos. A subtração dos logaritmos pode ser simplificação de tal forma a se tornar um quociente, veja a seguir sua demonstração e após a restante da demonstração.

De acordo com a propriedade 2 dos logaritmos, $log_c(\frac{a}{b}) \ = log_c\, a - log_c\, b$, a sua demonstração parte da hipótese que:

Propriedade 2:

$log_c\, a = x \Rightarrow c^x = a$(I)

$log_c\, b = y \Rightarrow c^y = b$ (II)

Deseja-se determinar o logaritmo do quociente entre a e b, então, dividindo a (I) pela (II) teremos:

$$c^x.c^y = a.b \Rightarrow c^{x-y} = a.b \Rightarrow \therefore log_c(a\,.b) \ = x - y$$

Por hipótese:$x = log_c\, a$e $y = \ \log_c$ b, portanto:

$log_c(\frac{a}{b}) \ = log_c\, a - log_c\, b$

(c.q.d)

Fazendo uso da propriedade demonstrada acima, tem-se que:

$$\ln P - ln\left(1 - \frac{P}{K}\right) = rt + a$$

Aplicando a propriedade logarítmica no primeiro membro (propriedade 2, p. 37), temos:

$$\ln\left(\frac{P}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)}\right) = rt + a$$

$$\frac{P}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = e^{rt+a}$$

$$P \ = \left(1 - \frac{P}{K}\right)e^{rt+a}$$

$$PK = K.e^{rt+a} - P.e^{rt+a}$$

$$P(K + e^{rt+a}) = K.e^{rt+a}$$

$$P = \frac{K.e^{rt+a}}{(K + e^{rt+a})}$$

Colocando o termo e^{rt+a} em evidencia, então:

$$P = \frac{K.e^{rt+a}}{e^{rt+a}(Ke^{-(rt+a)} + 1)}$$

Conclui-se que:

$$P = \frac{K}{Ke^{-(rt+a)} + 1}$$

$$N = \frac{K}{1 + K.e^{-(a+rt)}}$$

(4)

Vejamos a seguinte situação problema proposta por COSTA, Gabriel B. e BRONSON, Richard, (p. 71 – 72, 2008).

Situação problema 3.1.2

Cinco ratos em uma população estável de 500 são intencionalmente infectados com uma doença contagiosa para testar uma teoria de disseminação de epidemia, segundo a qual a taxa de variação da população infectada é proporcional ao produto entre o número de ratos infectados e o número de ratos sem a doença. Admitindo que essa teoria seja correta, qual o tempo necessário para que metade da população contraia a doença?

Resolução:

$$\frac{dP}{dt} = kP.(500 - P)$$

$$\frac{dP}{dt} = kP.(500 - P)$$

Então, aplicando o conceito de integral, tem-se que:

$$\frac{dP}{dt} = kP.(500 - P) \Rightarrow \int \frac{dP}{P(500 - P)} = \int k.dt$$

$$\int \frac{dP}{P.(500-\ P)} = \int \frac{1}{P.(500-\ P)}dP$$

Para isolar o valor final da população P, utilizaremos o método de resolução de frações parciais, então:

$$\frac{1}{P.(500-\ P)}dP = \frac{A}{P} + \frac{B}{(500-\ P)}$$

$$\frac{1}{P.(500-\ P)} = \frac{A(500-\ P) +\ B.P}{P.(500-\ P)}$$

$$1 = A(500-\ P) +\ B.P$$

O valor de P deverá receber valores de tal forma, que haja o cancelamento de uma parcela para determinar os valores das constantes A e B. Conclui-se que P = 0 e P = K, então:

Para P = 0, temos que:

$$1 = A(500-\ 0) +\ B.0$$

$$1 = 500A \ \Rightarrow A = \frac{1}{500}$$

Para P = 500, temos que:

$$1 = A(500-500) +\ B.500$$

$$1 = B.500 \ \Rightarrow B = \frac{1}{500}$$

Consequentemente:

$$\int \frac{1}{P.(500-\ P)}dP = \int \frac{\frac{1}{500}}{P}dP + \int \frac{\frac{1}{500}}{(500-\ P)}dP$$

$$\int \frac{1}{P.(500-\ P)}dP = \frac{1}{500}\int \frac{1}{P}dP + \frac{1}{500}\int \frac{1}{(500-\ P)}dP$$

$$\int \frac{1}{P.(500-\ P)}dP = \frac{1}{500} \cdot \left[\int \frac{1}{P}dP + \int \frac{1}{(500-\ P)}dP\right]$$

Resolvendo cada parcela do segundo membro da equação acima, então a primeira parcela é a seguinte:

$$\int \frac{1}{P}dP = \ln|P|$$

Determinando cada parcela do segundo membro da equação acima, então a primeira parcela é a subsequente, torna-se:

$$(u)'= (500 - P)' \implies \frac{du}{dP} = -1 \implies dP = -du$$

$$\int \frac{1}{(500 - P)}dP = \int \frac{1}{(500 - P)}dP = \int \frac{1}{u}(-du) = -\int \frac{1}{u}\,du = -ln(500 - P)$$

Voltando a equação anterior, teremos que:

$$\int \frac{1}{P.(500 - P)}dP = \frac{1}{500}.\left[\int \frac{1}{P}dP + \int \frac{1}{(500 - P)}dP\right]$$

$$\int \frac{1}{P.(500 - P)}dP = \frac{1}{500}.(\ln|P| - ln|500 - P|)$$

Após a resolução das integrais, retomamos a operação inicial e assim descreve-se o modela da seguinte forma:

$$\int \frac{dP}{P.(500 - P)} = \int k.dt$$

$$\frac{1}{500}.(\ln|P| - ln|500 - P|) = kt + m$$

$$\frac{1}{500}.\left(\ln P - ln(500 - P)\right) = kt + m$$

Aplicando a propriedade 2 (p. 37) obtém-se que:

$$\ln\left(\frac{P}{(500 - P)}\right) = 500.(kt + m)$$

$$\frac{P}{(500 - P)} =.e^{500(kt+m)}$$

$$P = (500 - P)e^{500.(kt+m)}$$
$$P = 500.e^{500.(kt+m)} - P.e^{500(kt+m)}$$
$$\left[P\left(1 + e^{500(kt+m)}\right) = 500.e^{500(kt+m)}\right] \times .e^{-500.(kt+m)}$$

Conclui-se que o modelo final tem esse modelo com a manifestação explícita da função exponencial, que:

$$P(t) = \frac{500}{1 + e^{-500.(kt+m)}}$$

Sendo que P(0) = 5, substituindo para a determinação do parâmetro m, logo:

$$P(0) = \frac{500}{1 + e^{-500.[k(0)+m]}}$$
$$5 = \frac{500}{1 + e^{-500.m}}$$
$$\frac{5 \quad \div 5}{500 \div 5} = \frac{1}{1 + e^{-500.m}}$$
$$\frac{1}{100} = \frac{1}{1 + e^{-500.m}}$$

Efetuando a propriedade fundamental da proporção: produto dos meios pelos extremos, tem-se:

$$100 = 1 + e^{-500.m}$$
$$e^{-500.m} = 100 - 1$$
$$e^{-500.m} = 100 - 1$$
$$\ln e^{-500.m} = \ln 99$$
$$-500.m = \ln 99 \quad \Rightarrow m = -\frac{\ln 99}{500} \Rightarrow \therefore m = \frac{\ln \frac{1}{99}}{500}$$

Substituindo modelo analise o valor do parâmetro m, temos essa configuração final:

$$P(t) = \frac{500}{1 + e^{-500.(kt + \frac{\ln\frac{1}{99}}{500})}}$$

$$P(t) = \frac{500}{1 + e^{-500kt}.e^{-500.(\frac{\ln\frac{1}{99}}{500})}}$$

$$P(t) = \frac{500}{1 + e^{-500kt}.e^{-\ln\frac{1}{99}}}$$

Sendo ln $\frac{1}{99}$ = $\log_e \frac{1}{99}$, consequentemente:

$$P(t) = \frac{500}{1 + e^{-500kt}.e^{-\log_e\frac{1}{99}}}$$

Usaremos a propriedade 3:$a^{\log_a b} = b$, que será demonstrada a seguir:

Propriedade 3:

Tomando (I)$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$. Sendo que, $\log_a b = x \Rightarrow a^{\log_a b} = b$

(c.q.d)

$$P(t) = \frac{500}{1 + 99.e^{-500kt}}$$

Lembre-se que a k é uma constante qualquer, como o exercício busca-se saber quanto tempo tem que se passar para que a população de ratos se reduza a metade, por isso P (t) = 250, então:

$$250 = \frac{500}{1 + 99.e^{-500kt}}$$

$$\frac{250}{500} = \frac{1}{1 + 99.e^{-500kt}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 99.e^{-500kt}}$$

$$1 + 99.e^{-500kt} = 2$$

$$99.e^{-500kt} = 2 - 1$$

$$e^{-500kt} = \frac{1}{99}$$

$$\ln e^{-500kt} = \ln \frac{1}{99}$$

$$-500kt = -\ln 99$$

$$t = \frac{\ln 99}{500.k} \cong \frac{0,00919}{k} \text{ unidades de tempo.}$$

3.2 Juros Compostos: Uma Análise De Seu Modelo Matemático

No regime de capitalização composta, será mostrado o mecanismo utilizado por muitas instituições financeiras, como por exemplo os bancos, eles sabem desfrutarem de todas as propriedades favoráveis que esse tipo de operação comercial promove através do seu modelo matemático. Serão feitas a seguir duas demonstrações uma pelo método da indução matemática e outra por meio de equações diferenciais.

Nota-se que o modelo matemático mais utilizado no cenário das instituições financeiras é: $M(t) = C.(1 + i)^t$. Vejamos a sua demonstração através do método de indução.

Sabe-se que as demonstrações serão realizadas a partir da relação intuitiva que o valor final é valor inicial mais a taxa percentual correspondente ao esse valor inicial, algebricamente escrita a seguir:

$$V_F = V_O.(1 + i) \tag{5}$$

Onde:

V_F: valor final

V_O: valor inicial

i: taxa percentual (em decimal).

A dedução da relação de juros compostos é feita a partir de intervalos de tempo, como descrito a seguir:

$t = 0 \Rightarrow M(t) = C(1 + i)^0 \Rightarrow M(0) = C$

Nota-se que nesse regime de capitalização, o capital do mês posterior é o montante do mês anterior então o capital C do próximo mês será o montante M(0), consequentemente, teremos:

$T = 1 \Rightarrow M(1) = M(0).(1 + i)^1 \Rightarrow M(1) = C(1 + i)$

Então no próximo mês o capital C será o montante do mês anterior que é M(1), logo:

$T = 2 \Rightarrow M(2) = M(1).(1 + i) \Rightarrow M(1) = C(1 + i)(1 + i) \Rightarrow M(1) = C(1 + i)^2$

O processo dos próximos meses é da mesma forma, então analogamente:

$T = 3 \Rightarrow M(3) = M(2).(1 + i) \Rightarrow M(3) = C(1 + i)^2.(1 + i) \Rightarrow M(1) = C(1 + i)^3$
$T = 4 \Rightarrow M(4) = M(3).(1 + i) \Rightarrow M(4) = C(1 + i)^3.(1 + i) \Rightarrow M(1) = C(1 + i)^4$
$T = 5 \Rightarrow M(5) = M(4).(1 + i) \Rightarrow M(5) = C(1 + i)^4.(1 + i) \Rightarrow M(1) = C(1 + i)^5$

$\vdots$

$T = t - 1 \Rightarrow M(t-1) = M(t-2).(1 + i) \Rightarrow M(t-1) = C(1 + i)^{t-2}.(1 + i) \Rightarrow M(1) = C(1 + i)^{t-1}$

$T = t \Rightarrow M(t) = M(t-1).(1 + i) \Rightarrow M(t) = C(1 + i)^{t-1}.(1 + i) \Rightarrow M(t) = C(1 + i)^t$ (6)

No entanto, a mesma relação pode ser descrita da forma: $M = C.e^{kt}$, o diferencial entre ambas, são as bases utilizadas mais a seguir é explícita a observação dessa mudança, observe.

$M(t) = C(1 + i)^t$ e $M = C.e^{kt}$

Por outro lado, nessa demonstração utilizará novamente os conhecimentos sobre derivada, por que percebe-se que a taxa de variação do montante em relação ao tempo é proporcional ao capital, logo:

$$\frac{dM}{dt} = kC$$

É explicito que por meio dos conceitos de equações diferenciais através do método de separação de variáveis percebe-se que determinaremos uma solução geral, no qual determinaremos um valor para C, então:

$$\frac{dC}{dt} - kC = 0$$

Multiplicando toda equação por *dt*, obtemos:

$$dC - kC.dt = 0.dt$$

Como sabemos que capital C é diferente de zero, portanto:

$$\frac{1}{C}.dC - k.dt = 0.dt$$

Aplicando o operador de integral temos que:

$$\int \frac{1}{C}.dC - \int k.dt = \int 0.dt$$

As integrais acima, obtemos os seguintes resultados:

$$\ln|C| - kt = j$$

$$\ln|C| = k + j$$

$$|C| = e^{kt+j}$$

$$C = e^{j}.e^{kt}$$

C está representando o valor de face [7]da operação comercial, representamos M e logo:

$$C = e^{j}.e^{kt}$$
$$C_F = C_0.e^{kt}$$

C_F: capital final = montante, será representado pela letra M.

C_0: capital inicial = capital, será representada pela letra C.

$$M(t) = C.e^{kt} \tag{7}$$

Em ambos, os modelos notam-se que há manifestação explícita da função exponencial, por que a variável explicativa, neste caso o tempo, situa-se na potência, e devido a essa propriedade que a multiplicação do valor inicial aumenta tão rapidamente, pois parar de aplicar o capital a juros proporcionais e passar a aplicar a juros compostos o aumento adquirido é equivalente, que em outras palavras, é muito mais conveniente para o aplicador.

Este fenômeno descreve claramente que as instituições fazem empréstimos, que em pouco intervalo de tempo, arrecada o dobro do retirado, claro que esse valor depende muito da taxa na qual o empréstimo foi efetivado. Vejamos a seguinte situação problema 3.2.1 proposta por COSTA e BRONSON (p. 67 – 68, 2008).

Situação problema 3.2.1

Uma pessoa deposita R$ 20.000,00 em uma poupança que paga 5% de juros ao ano, compostos continuamente. Determine (a) o saldo da conta após três anos e (b) o tempo necessário para que a quantia inicial duplique, admitindo que não tenha havido retiradas ou depósitos adicionais.

Resolução:

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}05C$$

[7] Sinônimo utilizados nos livros de matemática financeira para representar a variável do montante, ou em alguns casos também chamado de valor final.

$$\int \frac{dC}{C} = \int 0{,}05dt$$
$$\ln C = 0{,}05\,t + d$$
$$C = e^{0{,}05t+d}$$
$$C = e^{d}.e^{0{,}05t+d}$$
$$M = C.e^{0{,}05t}$$

Sendo, C = 20.000,00, então: $M(t) = 2000.e^{0{,}05t}$.

a) $M(t) = 2000.e^{0{,}05t} \Rightarrow M(3) = 20.000.e^{0{,}05.(3)} = 20.000.e^{0{,}15}$

Dado: $e^{0{,}15} \cong 1{,}1618$

$$M(3) = 20.000.(1{,}1618) \Rightarrow M(3) = 23.236{,}68$$

b) Para o capital se duplicar, nota-se que M = 2C, logo:

$$2C = C.e^{0{,}05t}$$
$$2 = e^{0{,}05t}$$

Existem um logaritmo com uma classificação especial por utilizar uma base com o número *e* (Número de Euler). Ele é chamado de logaritmo natural, denotado por:

$$\log_e x = \ln x$$

Consequentemente, como a base da equação exponencial é esse número aplica-se ln em ambos os membros, daí:

$$\ln 2 = \ln e^{0{,}05t}$$
$$\ln 2 = 0{,}05t$$
$$t = \frac{\ln 2}{0{,}05}$$
$$t \cong 13{,}8629 \text{ meses}$$

Vejamos a seguinte situação problema 3.2.2 propostas por PUCCINI (p.23, 2007).

Situação problema 3.2.2

Determinar o prazo em que um dado capital dobra de valor se aplicado a uma taxa de 5% am. Em quanto tempo triplicará?

Resolução:

O tempo necessário para que o capital dobre, então o montante M = 2C, i = 0,05 a.m, logo:

$$M(t) = C(1 + i)^t$$
$$2C = C(1 + 0{,}05)^t$$
$$2 = (1{,}05)^t$$

Neste momento, em que no modelo temos uma manifestação explícita da função exponencial e implícita da função logarítmica, pois não é possível aplicar a propriedade da função exponencial de redução de, portanto, a operação da função logarítmica consegui fazer facilmente a determinação do t, graças a sua propriedade que garante que o expoente do logaritmando pode transformar em fator do logaritmo então, vejamos:

$$\log 2 = \log(1{,}05)^t$$

Aplicando as propriedades 1 (p. 32) teremos:

$$t = \frac{\log 2}{log 1{,}05} \cong 14{,}02 \text{ meses}$$

O tempo que gastará para triplicar, faz-se a resolução analogamente a anterior, por isso serão apresentados apenas os cálculos logo:

$$M(t) = C(1 + i)^t$$
$$3C = C(1 + 0{,}05)^t$$
$$3 = (1{,}05)^t$$

Neste momento, em que no modelo temos uma manifestação explícita da função exponencial e implícita, pois não tem propriedade de redução de base até por que não é possível, portanto, a operação da função logarítmica consegui fazer isso e facilmente, vejamos:

$$\log 3 = \log(1{,}05)^t$$

Aplicando as propriedades1 (p.32) teremos:

$$t = \frac{\log 3}{log 1{,}05} \cong 22{,}51 \text{ meses}$$

Vejamos a seguinte situação problema 3.2.3 e a 3.2.4 propostas por PEREIRA (p.9, 2006).

Situação problema 3.2.3

Pedro Ivo aplicou R$ 5.000,00 em um tipo de aplicação que rendeu juros a umataxa de 8% ao mês sob regime de capitalização composta. Se o montante foi deR$10.794,62, quanto tempo durou essa aplicação?

Resolução:

Para resolver esse problema basta substituir os valores conhecidos na fórmula$M = C.(1 + i)^t$. Lembrando que 8% = 0,08. Assim:

$$10.794{,}62 = 5.000\ (1 + 0{,}08\ )^t$$

$$\frac{10.794{,}62}{5000} = (1{,}08)^t$$

$$2{,}1589 = (1{,}08)^t$$

Como então resolver essa equação exponencial $(1{,}08)^t = 2{,}1589$? Aqui notamos a manifestação implícita da função logarítmica, pois podemos usar aseguinte propriedade da operação da função logarítmica: se log a = *log b* então *a = b*.

Dessa forma temos$log(1{,}08)^t = log\ 2{,}1589$.

Recorrendo a uma outra propriedade podemos escrever: $t.\ log(1{,}08) = log\ 2{,}1589$. Assim:

$$t = \frac{log(2{,}1589)}{log(1{,}08)}$$

Por meio de uma calculadora encontramos os valores dos logaritmos e determinamos o quociente:

$$t = \frac{0,3342}{0,0334} \Rightarrow t = 10 \text{ meses.}$$

Situação problema 3.2.4

Um capital de R$ 2.500,00 é aplicado a uma taxa mensal de 5% ao mês por um determinado período. Se os juros recebidos foram de R$ 538,77 por quanto tempo esse capital permaneceu empregado? Considere o regime de capitalização composta.

Resolução:

$$M = C + j \Rightarrow 2.500,00 + 538,77 = 3.038,77$$

$$M = C(1 + i)^t$$

$$3038,77 = 2500(1 + 0,05)^t$$

$$\frac{3038,77}{2500} = (1,05)^t \Rightarrow 1,2155 = (1,05)^t$$

Aqui notamos a manifestação implícita função logarítmica por que são nestes momentos em que utilizamos as suas propriedades fundamentalmente, pois nestes casos específicos como a equação exponencial acima, não conseguimos usufruir da propriedade de redução de bases iguais, por isso como os logaritmos não temos restrições para as bases positivas e diferente de um, logo:

$$\log(1,2155) = \log(1,05)^t \Rightarrow \log(1,05)^t = \log(1,2155)$$

$$t \,.\, \log(1,05) = \log(1,2155) \Rightarrow t = \frac{\log(1,2155)}{\log(1,05)} \Rightarrow t = \frac{0,0845}{0,0211} = 4 \text{ meses.}$$

Este capital permaneceu empregado por 4 meses.

3.3 Uma Visão Matemática No Estudo De Intensidade Sonora

Falar sobre intensidade sonora é não é fácil, pois é um tópico que possui teorias bem profundas e que serão relatadas de forma resumida com o intuito de mostrar a presença da função logarítmica e sua inversa neste contexto.

De acordo com Lazarrini, o som é: “[...] um quantidade tridimensional, por isso temos que levar em conta a área quando se fala em transmissão de energia, isto é temos que definir uma quantidade em termos de watts por unidade de área.” (p. 11-12, 1998)

Entende-se que segundo Lazarrini, essa intensidade tridimensional é a denominada como sendo a intensidade sonora, que oferece uma densidade da potência de um determinado som no qual se propaga em uma direção qualquer, o que significa que se dissemina em uma direção particular.

Lazarrini afirma também que:

> “[...] A intensidade sonora representa o fluxo de energia por unidade de área. Pode variar em uma escala que é maior que um milhão de milhões (10^{-12}). Por esta causa e pela maneira em que percebemos o volume sonoro, a intensidade é expressada em uma escala logarítmica.” (p.12, 1998)

Nota-se que a manifestação da função logarítmica é explícita neste caso, como foi ressaltado por Lazarrini, no trecho acima. Após o entendimento de como consiste a intensidade e a operação usada, veja sua representação matemática a seguir, sendo: “A escala logarítmica usada aqui é baseada na razão entre a densidade de potência real e uma intensidade de referência (1 picowatt por metro quadrado, $10^{-12}Wm^{-2}$.”, afirma Lazarrini (p.12, 1998), então:

$$N = 10.\log\left(\frac{I_r}{I_{ref}}\right) \tag{8}$$

Considere:

N: nível de intensidade sonora.

I_r: o fluxo de potência sonora real (watts por metro quadrado).

I_{ref}: o fluxo de potência sonora de referência ($10^{-12}Wm^{-2}$).

Mas fica-se um questionamento do por que a relação tem um fator 10? Essa pergunta foi respondida por Lazarrini, em sua considera que:

> "O fator de 10 aparece pois faz do resultado um número em que uma variação de número inteiro produz uma mudança que é aproximada à menor variação que o ouvido humano pode perceber. Uma mudança de fator 10 na razão da densidade de potência é chamada de bel. Na equação do nível de intensidade sonora, isso provocaria uma variação de 10 no resultado (SIL[8] = 10log1010 = 10). Então uma mudança equivalente a uma unidade inteira (um número inteiro) é chamada de decibel (dB)." (p.12, 1998)

Este tópico não terá uma demonstração matemática como nos outros, pois a sua demonstração surgi no estudo da psicofísica e que é um assunto amplo e pelo fato de não ser o foca da pesquisa, fica a cargo do leitor que tiver curiosidade de desenvolver um estudo minucioso, fazer uma leitura deste tópico.

A partir de agora, veja os exercícios propostos que envolve essa temática e como se manifestam essa função em meio as suas resoluções.

Vejamos a seguinte situação problema 3.3.1 proposto por TAKEDA e MORCELLI (p. 22, 2012).

Situação Problema 3.3.1

Qual é o nível de intensidade sonora, em decibéis (dB), de um som que tem intensidade de $10^{-10}\,\frac{W}{m^2}$? Considere a intensidade do limiar da percepção auditiva igual a$10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$.

O nível de intensidade sonora é dado por:

$$N = 10.\,log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Substituindo os valores, temos*:*

$$N = 10.\,log\left(\frac{10^{-10}}{10^{-12}}\right)$$

$$\beta = 10\log 10^2$$

$$\beta = 10.2.\log 10$$

$$\beta = 20\ dB$$

[8] Nível de intensidade sonora.

Neste exemplo, percebe-se claramente a operação da função logarítmica para a determinação de valores que explicam a situação problema.

3.4 Escala Richter E Escala Mercalli Por Ângulo Matemático

Estas escalas fazem parte dos elementos fundamentais para representar numericamente os impactos provocados por abalos sísmicos. Sabe-se que a escala Mercalli é uma escala rotulado como subjetiva pelo fato de haver a necessidade de representar a intensidade que o abalo provocou em tal época e daí elaboram a mesma por que a análise realizará a partir de relatos dos que vivenciaram a ação de tal fenômeno, devido a isso, afirmam que os julgamentos sobre os impactos de um abalo são muito particular e variam de cada indivíduo. Pois leva em consideração a opinião da pessoa entrevistada, sendo assim, como somos seres históricos e além disso, qualquer um pode ter certa interpretação de uma situação vivida, isso faz-se uma não-padronização, consequentemente muitos sentem de insegurança de analisar os impactos vividos atualmente por meio dela.

Esse sentimento de incerteza surgiu de estudos feitos com o intuito de criar um instrumento que promovesse essa padronização. Desse momento, marcados pela divisão de instrumentos, por que com o surgimento do sismógrafo, elaboram-se uma nova escala denominada Escala Richter e a mesma é fundamentada por meio de uma representação numérica.

Seus resultados são descritos numericamente, por que os mesmos são baseados na amplitude e na frequência das ondas captadas pelo sismógrafo, isso promove maior facilidade e principalmente segurança para o que quer falar sobre tal fenômeno ocorrido em determinado lugar, até por que será feita uma análise quantitativa primeiro e após esse estudo numérico que construirá um conceito qualitativa da situação.

Nota-se que seus resultados são embasados a partir da amplitude da onda por que seu criador estabeleceu essa relação a partir de uma observação que a amplitude é expressa através de uma escala logarítmica, a uma observação mais especifica ainda é que a amplitude de vibração variava de acordo com o fator 10, por isso podemos concluir que o logaritmo de

Henry Briggs[9], o logaritmo decimal é utilizado (HENRIQUE. p.7, 2006).Na escala, ao invés de representar: 10, 100, 1000, ...; utilizamos as potencias da base decimal da sequência citada acima, logo podem ser escritas assim: $10^1, 10^2, 10^3, ...$; por isso, na escala de classificação utilizamos os expoentes 1, 2, 3, ..., assim significando cada um (HENRIQUE, p.7, 2006).

Um exemplo a situação acima, se classificamos um abalo sísmico com intensidade 6 quer dizer que um terremoto com intensidade 5 é 10 vezes menor que um de 6 pontos na escala Richter e um com 4 pontos é cem vezes menor e assim sucessivamente (HENRIQUE, p.7, 2006).

Então, a escala Richter pode ser enunciada segundo (HENRIQUE, p.7, 2006) da seguinte forma: “A escala Richter é uma escala logarítmica a magnitude de Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas de tipo P (pressão máxima) e S (superficial) a 100 Km do epicentro”.

Segundo o site de disciplina de Geografia Portal dia a dia Educação do Estado do Paraná, afirma que:

> “[...] Em termos gerais a energia de um terremoto aumentaria um fator 33 para cada grau de magnitude, ou aproximadamente 1000 vezes a cada duas unidades. A escala Richter é uma escala infinita ou aberta, podendo inclusive apresentar números negativos. No entanto, as forças naturais envolvidas limitam o topo da escala em aproximadamente 10. Teoricamente não existe energia em um terremoto capaz de superar esta marca.”(p.1, [s.d.])

Veja a seguir, a tabela de escala Richter, no qual esta associação da intensidade númerico e seu possivel efeito (impactos).

Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
Entre 3,5 e 5,4	Ás vezes sentido, mas raramente causa danos.
Entre 5,5 e 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 Km do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grande terremoto, pode causar sérios danos numa grande faixa de área.
8,0 ou mais	Enorme terremoto, pode causar grandes danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Fonte: Logaritmos e Terremotos: Aplicação da escala logarítmica nos abalos sísmicos. HENRIQUE, Cynthia Adeline Pinheiro, p. 10, 2006.

[9] Logaritmo decimal recebeu o nome de logaritmo de Briggs, pelo fato de Henry Briggs ter sido o responsável pela publicação da tabua juntamente com John Napier, seu mestre.

Logo, a sua relação que envolve a escala é várias, por que cada uma utiliza-se uma grandeza diferente, então (HENRIQUE, p.7-8, 2006):

1) Magnitude e energia

$$log\,E = 11{,}8 + 1{,}5M \tag{9}$$

No qual, as incógnitas acima representam:

E = energia liberada em ergs (1 erg = 10 −7 J)

M = magnitude do terremoto

2) Magnitude e amplitudes das ondas

$$M_L = logA - logA0 \tag{10}$$

Sendo que,

A = amplitude máxima medida no sismógrafo

A_0= amplitude de referência.

3) Magnitudes, amplitude e frequência:

$$M_S = log(A.f) + 3{,}3 \tag{11}$$

M_S = magnitude do terremoto na escala Richter

A = Amplitude do movimento da onda registrada no sismógrafo (em μ m)

f = frequência da onda (em hertz)

Observação: utilizada para determinação da magnitude de abalos sísmicos de possuem grandes distancias. Essas são relações utilizadas para determinação da intensidade de determinados abalos (HENRIQUE, p.8, 2006)

Vejamos a seguinte situação problema 3.3.1 proposto por HENRIQUE (p.8, 2006).

Situação problema 3.4.1

Suponha que um terremoto teve como amplitude 100000 micrometros e a frequência a 0,01Hz. Qual a magnitude desse terremoto no local onde está instalado o sismógrafo será?

Resolução:

M_S= log(A . f) + 3,3

M_S= log (100000. 0,01) + 3,3

M_S= log(100000.$\frac{1}{100}$) + 3,3

M_S= log 1000 + 3,3

M_S= log 10^3 + 3,3

M_S= 3 + 3,3

$\Rightarrow \therefore$ M_S= 6,3 (com margem de erro 0,3 para mais ou para menos) na escala Richter.

Exemplo 3.3.2 retirado da prova Amarela do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), questão 139, 2011

Situação problema 3.4.2

A Escala e Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como MW), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica.M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10,7 + \frac{2}{3}.\ log_{10} M_0$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina · cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude M_W = 7,3.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina · cm)?

A) $10^{-5,10}$

B) $10^{-0,73}$

C) $10^{12,00}$

D) $10^{21,65}$

E) $10^{27,00}$

Resolução:

De acordo com o enunciado, $M_W = 7,3$, então substituindo o seu valor, teremos:

$$7,3 = -10,7 + \frac{2}{3}.\ log_{10}\, M_0 \Rightarrow \frac{2}{3}.\ log_{10}\, M_0 = 18 \Rightarrow log_{10}\, M_0 = 27$$

Pela definição dos logaritmos, podemos escrever sua equação logarítmica em uma equação exponencial, aqui neste momento, visualiza-se de forma bem transparente a manifestação implícita da exponencial quando há necessidade de determinação de alguma incógnita da equação logarítmica, então:

$$\log_{10} M_0 = 27 \Rightarrow \ M_0 = 10^{27}$$

Então, conclui-se que a alternativa correta da questão é a letra e.

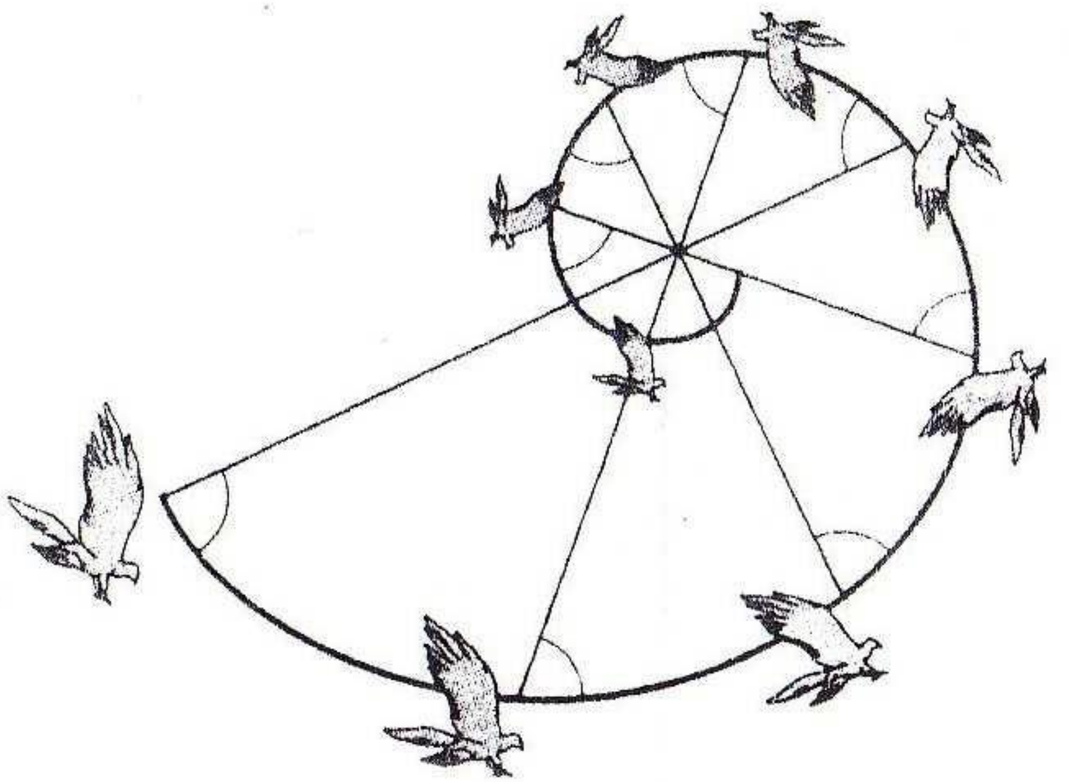
3.5 O Falcão Peregrino E A Representação Matemática Do Seu Formato De Voo.

O falcão peregrino tem seu formato de voo como sendo um a espiral logarítmica ou também denominado como espiral equiangular. Recebe esse nome, por que para a espiral logarítmica ter esse formato e manter aquela curvatura é necessária uma inclinação constante em relação ao percurso (NETO, 2008).

Segundo NETO, o falcão utiliza:

> “Aves de rapina, como falcões e águias, possuem duas regiões da retina em cada olho que são especializadas na visão de alta resolução: a fóvea profunda e a fóvea rasa. A linha de visão da fóvea profunda aponta para frente e aproximadamente 45 ° para a direita ou esquerda do eixo da cabeça, enquanto a da fóvea rasa também aponta para frente, porém aproximadamente 15 ° para a direita ou esquerda. A anatomia das fóveas sugere que a fóvea profunda tem a maior acuidade visual. As aves de rapina consideradas movem repetidamente suas cabeças entre três posições enquanto olham para um objeto: direta, com o eixo da cabeça apontando em direção ao objeto; ou para os lados, esquerda ou direita, com o eixo da cabeça apontando aproximadamente 40° para o lado do objeto. Desde que aves de rapina não giram seus olhos perceptivelmente nas caixas oculares, estes movimentos presumivelmente fazem com que a imagem caia na fóvea rasa e fóvea profunda.” (p.29, 2008)

E graça a posição do olho dessa ave de rapina, a melhor forma para aproveitar o seu ângulo de visão é fazer o seu ataque usando essa trajetória. Veja na figura a seguir é o formato do voo desse animal.



Fonte: Peregrine falcon flight patterns along an equiangular spiral, p.119. http://goldenratiomyth.weebly.com/uploads/4/0/7/7/4077600/6816107_orig.jpg?234

Na figura acima, percebe-se claramente que o falcão aproveita sua visão e além disso, o seu movimento manter uma inclinação constante como a espiral é uma curva que gira em torno de um centro o ataque será infalível.

Sabe-se que a equação geral do voo de um falcão peregrino é:

$$r = a.e^{\theta \cot \alpha} \tag{12}$$

Considere:

a: uma constante.

θ: é o ângulo em radianos formado entre o eixo r e o eixo x.

α: constante durante todo percurso. (AUGUSTO. p.63, 2009)

Já PUPIM (2013), tem uma definição similar à de AUGUSTO (2009), com uma diferença que considerou $\cot \alpha = a$, então foi definida por ele, como:

> Espiral logarítmica plana de centro no ponto A é o lugar geométrico de todos os pontos $P = (\rho, \theta)$ que obedecem a equação;
> $$\rho = b.e^{a\theta}$$
> Onde, θ varia nos reais, a e b são constantes não negativas em que b representa o fator de escala e a o fator de crescimento. (p.26)

E essa representação matemática é de uma espiral logarítmica não pode ser inscrita em um retângulo áureo, o que acontece é que elas se aproximam, porém não são iguais (AUGUSTO, 2009).

E por meio destas propriedades e a própria anatomia do falcão fez com que ele encontrasse mecanismo eficaz que aproveitou intensamente o formato natural e a matemática para a sua sobrevivência.

3.6 A Análise Da Manifestação Da Função Logarítmica E Sua Inversa Em pH (Potencial Hidrogeniônico) E pOH (Potencial Hidroxiliônico)

O pH e pOH são relações utilizadas na química, sendo que suas respectivas funções é medir a de acidez e basicidade em uma solução aquosa. Como visto no capítulo anterior ambos compõem uma escala e seus valores são determinados através de relações que serão demonstrados a seguir. Vale lembrar que existem alguns conceitos químicos que não é o objetivo principal desse trabalho, por isso serão apenas citados para auxiliar a demonstração das relações de pH e pOH e entender a utilização de cada função.

As escalas de pH e pOH foram desenvolvidas a partir do produto iônico da água K_W de acordo com Santoro(p. 49, 2013). A água purasofre um processo de auto ionização, apresentado abaixo:

$$H_2O \rightleftharpoons H^+_{(aq.)} + OH^-_{(aq.)} \tag{13}$$

A partir do equilíbrio químico descrito acima, escreve-se a seguinte equação da constante de equilíbrio Santoro (2013), então:

$$K_i = \frac{[H^+].[OH^-]}{[H_2O]}{}^{10} \Rightarrow K_i.[H_2O]^{11} = [H^+].[OH^-]$$

(14)

O primeiro membro da equação é composto pelo produto da concentração da água e a constante de equilíbrio e consequentemente será denominado como sendo o K_W (Santoro, 2013), então:

$$K_{W^{12}} = [H^+].[OH^-]$$

Após o entendimento da constante de equilíbrio, retomamos o conceito de medição da concentração de uma substância. Observe a seguir que a concentração de uma solução aquosa é determinada a partir de relação:

$[K] = 10^{-x}$

K: substância qualquer.

x: quantidade de íons de H^+ ou OH^-.

Consequentemente, a concentração de H^+ ou OH^-:

$$[H^+] = 10^{-x} \text{ e } [OH^-] = 10^{-y} \quad (15)$$

Como já é sabido que o logaritmo é o expoente que satisfaz a equação exponencial, simultaneamente, aplica-se a operação da função logarítmica, então obtém-se:

$$pH = -\log[H^+] \text{ e } pOH = -\log[OH^-]$$

(16)

Logo, pode-se concluir que nossa analise se estenderá a quantidade que a incógnita da base 10 assumirá, de uma forma ou de outra, o mesmo assumira um valor negativo, por que o resultado é consequência da relação de concentração. Então, agora vejamos a demonstração das relações citadas acima:

---

[10]K_i: É igual a multiplicação dos produtos elevados aos seus índices estequiométricos dividido pela concentração do reagente elevado ao seu índice estequiométrico.

[11]Concentração da água será considerado aproximadamente por 55,6 mol/L.

[12] W: letra que vem da palavra water que significa em português água, por isso, K_W é a constante da água.

$log\ [H^+] = log\ 10^{-x}$ e $log\ [OH^-] = log\ 10^{-y}$

Porém, ao buscar uma representação com o valor positivo a relação de pH e pOH tem sinal de (-) negativo, multiplicando os mesmos, para que a manipulação e análises sejam com números positivos na escala então, sendo p = log que segundo Ricardo Feltre (p.228, 2004) a letra minúscula p vem da palavra potência que recorda o expoente na definição da operação dos logaritmos, daí obtém-se que:

$log[H^+] = log\ 10^{-x}.(-1)$ e $log\ [OH^-] = log\ 10^{-y}.(-1)$

$-log[H^+] = -(-x)$ e $-log\ [OH^-] = -(-y)$

$x = -log[H^+]$ e $y = -log\ [OH^-]$

Os valores de x e y são os respectivos valores de pH e pOH, logo a configuração final da relação será:

$pH = -\ log[H^+]$ e $pOH = -\ log[OH^-]$

(c.q.d)

Um dado importante é que *pH + pOH = 14*, o que será mostrado a seguir, por meio de uma outra demonstração. Sabe-se que a água em condições normais para análise da IUPAC[13] é a 25° C cujo produto de sua concentração de íons é 10^{-14}. Então:

$$[H^+].[OH^-] = 10^{-14} \quad (16)$$

Aplicando log em ambos os membros da equação tem-se que:

$log[H^+].[OH^-] = log\ 10^{-14}$

De acordo com a propriedade dos logaritmos, $log_c(a\,.\,b) = log_c\,a + log_c\,b$, a sua demonstração é dada da seguinte forma:

[13]Sigla em inglês, União Internacional de Química Pura e Aplicada.

$log_c\, a = x \Rightarrow c^x = a$(I)

$log_c\, b = y \Rightarrow c^y = b$ (II)

Deseja-se determinar o logaritmo do produto entre a e b, então, multiplicando a (I) pela (II) teremos:

$$c^x . c^y = a.b \Rightarrow c^{x+y} = a.b \Rightarrow \therefore log_c(a\,.b) \; = x + y$$

Tomando como informação que $x = log_c\, a$e $y = \log_c b$, consequentemente:

$\log_c(a\,.\,b) \; = \log_c a + \log_c b$

(c.q.d)

Utilizando a propriedade demonstrada acima, temos:

$log[H^+] + log[OH^-] = -14.(-1)$

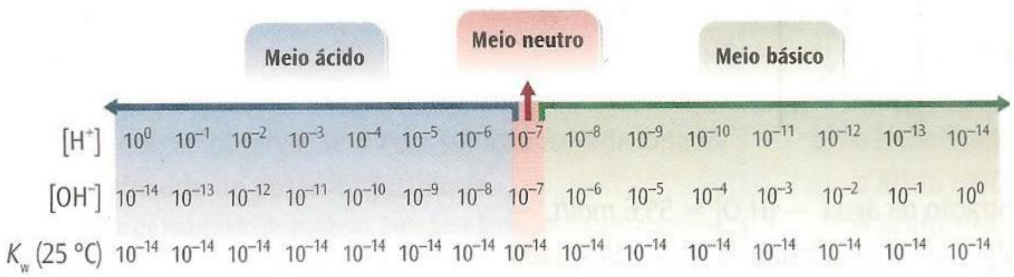
$-log[H^+] - log[OH^-] = 14$

Sendo, $pH = -\, log[H^+]$ e $pOH = -\, log[OH^-]$, conclui-se que:

$$pH + pOH = 14$$

(17)(c.q.d)

A seguir, um quadro feito por Santoro (p. 50, 2013) para mostrar de maneira simples a interpretação matemática do K_W e sua relação com pH e pOH, observe o quadro a seguir.



	Meio ácido						Meio neutro	Meio básico						
$[H^+]$	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}
$[OH^-]$	10^{-14}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0
K_w (25 °C)	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}

Fonte: Química: Equilíbrios das reações. SANTORO, Antônio César Baroni. p.50, 2013.

Vejamos a seguintes situações problemas 3.6.1 e 3.6.2 proposta por FELTRE (p.234, 2004).

Situação problema 3.6.1

A concentração Hidrogeniônico do suco de limão puro é 10^{-2} mol/L. O pH de um refresco preparado com 30 ml de limão e água suficiente para completar 300 ml é igual a:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 6
e) 11

Resolução:

O suco de limão vai ser diluído de 30 ml para 300 ml. Lembrando que, na diluição $V.M = V'.M'$, temos neste problema:

30.10^{-2} = 300 . $[H^+] \Longrightarrow [H^+]$ = 10^{-3} mol/L

$pH = -\log[H^+] \Longrightarrow pH = -\log 10^{-3}$

Neste momento, é que mostrar a utilidade do sinal de menos da relação, caso não existisse, teria um valor negativo, o que dificultaria a acessibilidade desse instrumento de análise para pessoas com um nível de escolaridade menor, por isso:

$pH = -(-3) = 3$ Alternativa b.

Situação problema 3.6.2

A análise feita durante um ano da chuva da cidade de São Paulo forneceu um valor médio de pH igual a 5. Comparando-se esse valor com o pH da água pura, percebe-se que a $[H^+]$ na agua da chuva ácida é, em média:

a) 2 vezes menor.
b) 5 vezes maior.
c) 100 vezes maior
d)2 vezes
e) 100 vezes menor

Resolução:

Para a chuva ácida: $pH = 5 \Longrightarrow [H^{+}]_{1} = 10^{-5}$

Para a água pura: $pH = 7 \Longrightarrow [H^{+}]_{2} = 10^{-7}$

Então: $\frac{[H^{+}]_{1}}{[H^{+}]_{2}} = \frac{10^{-5}}{10^{-7}} \Longrightarrow \frac{[H^{+}]_{1}}{[H^{+}]_{2}} = 100$

3.7 Representações Matemática Do Brilho Aparente Das Estrelas E Seu Envolvido Com A Função Logarítmica E Sua Inversa.

E inacreditável mesmo, mas o brilho aparente das estrelas pode ser medido esse foi uma ideia que se concretizou através de Hiparco de Samos, que segundo Alexandre Costa et al. ressalta que:

> "Hiparco de Samos, no século II a.C., fez o primeiro catálogo de estrelas. Classificou as mais brilhantes como de 1ª magnitude e as mais fracas, de 6ª. Assim inventou um sistema de divisão de brilhos das estrelas que ainda está vigente, contudo levemente retocado com medidas mais precisas que as tidas a olho nu.
>
> Uma estrela de magnitude 2 é mais brilhante que outra de magnitude 3. Há inclusive de magnitude 0 e de magnitude negativa, como Sírio, que possui magnitude -1,5. Prolongando a escala, Vênus chega a adquirir magnitude -4, a Lua cheia -13, e o Sol -26,8." (p. 5, [s. d.])

Mas, existe dois tipos principal de magnitudes: magnitude absoluta e aparente. A magnitude aparente será o foco. O brilho aparente é medido por meio da relação:

$$m = -2{,}5 \, log \, F + C \qquad (18)$$

Sendo:

m: magnitude aparente.

F: fluxo de energia.

C: constante.

Entende-se que na formula, há um coeficiente cujo valor é igual a -2,5, essa constante existe a partir de uma regra que foi adotada e tem a seguinte condição: uma estrela de magnitude 1 é 2,51 mais brilhante que a de magnitude 2 e assim sucessivamente. Esta regra acomoda que uma diferença entre uma estrela de magnitude 1 e uma estrela de magnitude 6 é de 5 magnitudes o que equivale a $(2{,}51)^5 = 100$ mais brilho (COSTA). Matematicamente, pode-se descrever essa situação entre a relação do brilho de duas estrelas da forma:

$$\frac{B_1}{B_2} = \left(\sqrt[5]{100}\right)^{m_2 - m_1} \tag{19}$$

Observe que a função exponencial está representada por meio da manifestação explícita, no entanto para escrevê-la de outra forma de tal maneira que as magnitudes aparentes tornem-se parcelas fora da potência, deve-se utilizar a operação inversa que é a operação logarítmica, que está implicitamente, então aplicando logaritmo decimal em ambos os membros temos:

$$\log\frac{B_1}{B_2} = \log\left(\sqrt[5]{100}\right)^{m_2 - m_1} \Rightarrow \log\frac{B_1}{B_2} = (m_2 - m_1).\log\left(\sqrt[5]{10^2}\right)$$

$$\log\frac{B_1}{B_2} = (m_2 - m_1).\log 10^{\frac{2}{5}}$$

$$\log\frac{B_1}{B_2} = \frac{2}{5}.(m_2 - m_1)$$

$$m_2 - m_1 = \frac{5}{2}.\log\frac{B_1}{B_2}$$

$$m_2 - m_1 = 2{,}5.\log\frac{B_1}{B_2} \tag{20}$$

Consequentemente, é fácil concluir que o brilho aparente das estrelas pode ser representado pela relação:

$$m = -2{,}5.\log F + c \tag{21}$$

Vejamos a seguintes situação problemas proposta por ORTIZ (p. 6 - 8, [s.d.]):

Situação problema 3.7.1

Qual é a magnitude aparente de uma estrela cujo brilho aparente é 10 vezes menor do que Vega?

Resolução:

$m = -2{,}5.\ log\left(\frac{B_1}{B_2}\right)$

$m = -2{,}5.\ log\left(\frac{0{,}1.B_2}{B_2}\right)$

$m = -2{,}5.\ log\ (10^{-1})$

$m = +2{,}5.\ log\ 10$

$m = +2{,}5$

Situação problema 3.7.2

Quantas vezes uma estrela *A* de magnitude 2,0 é mais brilhante do que uma estrela *B* de magnitude 5,5?

Resolução:

$m_A = -2{,}5.\ log\ (B_1/B_2)$ e $m_B = -2{,}5\ log\ (B_3/B_2)$

Subtraindo essas duas equações temos:

$m_A - m_B = -2{,}5.\ (log\ B_1 - log\ B_2) - [-2{,}5(log\ B_3 - log\ B_2)]$

$m_A - m_B = -2{,}5.\ [log\ B_1 - log\ B_2 - log\ B_3 + log\ B_2]$

$m_A - m_B = -2{,}5.\ [log\ B_1 - log\ B_3]$

$m_A - m_B = -2{,}5.\ [log\ \frac{B_1}{B_3}]$

No exemplo dado, $m_A = 2{,}0$ e $m_B = 5{,}5$ logo:

$2{,}0 - 5{,}5 = -2{,}5.\ log\frac{B_1}{B_3}$

$\left[-3{,}5\ = -2{,}5.\ log\ \frac{B_1}{B_3}\right].(-1)$

$\frac{\mathbf{-3{,}5}}{\mathbf{-2{,}5}} = log\frac{B_1}{B_3}$

Aqui, pode-se visualizar o conceito explicito da operação da função exponencial, já que é necessário fazer o processo inverso para a determinação do valor absoluto da razão $\frac{B_1}{B_3}$, então:

$$1{,}4 = log\frac{B_1}{B_3}$$

$$\frac{B_1}{B_3} = 10^{1,4} = 25{,}1$$

Portanto, a estrela *A* é 25,1 vezes mais brilhante que *B*

3.8 Decaimentos Do Carbono E Sua Representação E Envolvimento Com A Função Exponencial E Logarítmica.

Decaimento radioativo também pode ser tratado como a datação do carbono sinônimo que o recebe é definido por Reginaldo J. Santos essa datação do carbono 14 é feita: "[..] quando um organismo morre a absorção o de carbono 14 cessa e a partir de então o carbono 14 vai se transformando em carbono 12 a uma taxa que é proporcional a quantidade presente." (p. 68, 2011)

O que significa dizer, que cada organismo tempo certo tempo de desintegração, e esse elemento químico foi responsável por descoberta, assim dedicação contribuição relevante para os paleontólogos nas análises feitas em fosseis. Este estudo, pode se observar que esse tempo de desintegração é constante como afirma Santos (2011) e, principalmente, o intervalo de tempo relatado é chamado de meia-vida. De acordo com Zill e Cullen ressalta que:

> Em física, meia-vida é uma medida de estabilidade de uma substancia radioativa. A meia-vida é simplesmente o tempo gasto para metade dos átomos de uma quantidade inicial A_0 se desintegrar ou se transmutar em átomos de outro elemento. Quanto maior a meia-vida de uma substancia, mais instável ela é. (p.105, 2008)

Compreende-se que há uma taxa de variação da quantidade massa total de uma substancia em relação ao intervalo de tempo no qual a mesma é diretamente proporcional a quantidade de massa da substancia analisada. Logo:

$\frac{dA}{dt} = k.A,$ com $A(0) = A_0$(quantidade incial)

(22)

Aplicando o método de separação de variáveis de equações diferenciais ordinárias homogêneas é feita da seguinte forma:

$$\frac{dA}{A} - k.dt = 0$$
$$\int \frac{1}{A} dA - \int k\, dt = \int 0\, dt$$
$$ln|A| - kt = c$$
$$ln|A| = c + kt$$
$$|A(t)| = e^{c+kt}$$
$$A(t) = e^{c}.e^{kt}$$

Então, descrevendo o modelo de forma especifica, portanto:

$$A(0) = e^{c}.e^{k.0} = e^{c}.e^{0} = e^{c} = A_0$$

Conclui-se que, o modelo final do decaimento radioativo é:

$A(t) = A_0.e^{kt}$(23)

Visto o modelo matemático que descreve tal situação é fácil de saber que há uma manifestação explícita da função exponencial, mesmo por que na relação matemática percebe-se que que a variável explicativa situa-se na potência da expressão.

Será descrito alguns exemplos nos quais utilizam o conceito de decaimento radioativo.

Vejamos as seguintes situações problemas 3.8.1 proposta por SANTOS (p. 69, 2011).

Situação problema 3.8.1

Em um pedaço de madeira é encontrado 1/500 da quantidade original de carbono 14. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 ´e de 5600 anos, ou seja, que em 5600 anos metade do carbono14 presente transformou-se em carbono 12. Vamos determinar a idade deste pedaço de madeira.

Resolução:

$$\begin{cases} \frac{dA}{A} - k.dt = 0 \\ A(0) = A_0 \end{cases}$$

Sabe-se que:

$$A(t) = A_0.e^{kt}$$

(I) Determinação da meia vida.

Então, substituindo-se tempo t = 5600 e A(t) = $\frac{A_0}{2}$, tem-se:

$$\frac{A_0}{2} = A_0.e^{k.(5600)}$$

Consequentemente:

$$\frac{1}{2} = e^{k.(5600)}$$

Aplicando ln em ambos os membros temos:

$$ln\ \frac{1}{2} = \ln e^{k.(5600)}$$

Logo:

$$5600.k = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{5600} = -\frac{\ln 2}{5600}$$

Sendo $k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{5600} = -\frac{\ln 2}{5600}$, substituindo o seu valor na relação geral e simultaneamente, utilizaremos o A(t) = $\frac{1}{500}$ de acordo com o enunciado, por ser a quantidade final de massa encontrado, a partir daí é fácil determinar o tempo que gastou para chegar a essa quantidade, então, obtém-se:

$$\frac{1}{500}.A_0 = A_0.e^{kt} \Rightarrow \ln\frac{1}{500} = \ln e^{kt}$$

$$-\ln 500 = kt \Rightarrow t = \frac{-\ln 500}{k}$$

Considere:

$$k = -\frac{\ln 2}{5600}$$

$$t = \frac{-\ln 500}{-\frac{\ln 2}{5600}} = \frac{\ln 500\,.\,5600}{\ln 2} \cong 50.208{,}39 \text{ anos}$$

Vejamos a seguinte situação problema 3.8.2 proposto por COSTA e BRONSON (p. 70, 2008).

Situação problema 3.8.2

Certo material radioativo decai a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se existe inicialmente 50 miligramas de material, e se, após duas horas perdeu 10% de sua massa original, determine (a) a expressão da massa remanescente em um instante t, (b) a massa do material após 4 horas e (c) o tempo para o qual o material perde metade de sua massa.

Resolução:

a)

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{A} - k.dt = 0 \\ A\,(0) = A_0 \end{cases}$$

Como pode-se perceber claramente, que a equação é diferencial e separáveis. Sua solução é:

$$A(t) = A_0.e^{kt}$$

O tempo inicial t = 0, descreverá a quantidade massa inicial, mesmo sabendo que o enunciado já relatou, logo, fazendo uso dessa informação temos um a lei de formação da seguinte forma:

$$A(t) = 50.e^{kt}$$

Quando se passou duas horas (t = 2 horas) a substancia perdeu 10% da sua massa inicial, então:

$$A(2) = 50 - 10\%.50 \ \Rightarrow \ A(2) = 45$$

Consequentemente:

$$A(2) = 50.e^{k.(2)}$$
$$45 = 50.e^{k.(2)}$$
$$\ln e^{k.(2)} = \ln \frac{45}{50}$$
$$k = \frac{\ln \frac{45}{50}}{2} \cong -0{,}053$$

Portanto, o caso particular dessa situação problema é:

$$A(t) = 50.e^{-0{,}053.t}$$

Com o tempo t em horas.

b) Queremos determinar a quantidade massa quando se passar 4 horas. Então:

$$A(t) = 50.e^{-0{,}053.t}$$
$$A(4) = 50.e^{-0{,}053.(4)}$$
$$A(4) = 50.e^{-0{,}212}$$

Sendo, $e^{-0{,}212} = 0{,}809$, terá uma quantidade de massa final igual a:

$$A(4) = 50.(0{,}809) \ \Rightarrow \ A(4) \cong 40{,}45 \text{ miligramas}$$

c) A meia vida é a intervalo de tempo que se passa para que ocorra a desintegrada de metade da quantidade de massa inicial, portanto, A(t) =$\frac{50}{2}$ = 25 miligramas.

Então:

$$25 = 50.\,e^{-0,053.t}$$

$$\ln e^{-0,053.t} = \ln\frac{1}{2}$$

$$-0,053.\,t = -\ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0,053} \cong 13,07 \text{ horas}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem realizada neste trabalho monográfico está voltada para as aplicações das funções logarítmicas e sua inversa. A aplicação da função logarítmica e sua inversa são relevantes para que se entenda algumas situações que vivenciadas em nosso dia a dia, ou até mesmo compreender os impactos que determinado fenômeno estudado causou. Percebeu-se que alguns itens levantados buscam não apenas explanar o conceito, mas também compreender os desenvolvimentos e utilidades das propriedades que regem a função logarítmica e sua inversa.

Existem duas formas de manifestações da função logarítmicas e sua inversa, que podem ser explícitas ou implícitas. Teve-se como um dos objetivos destacar esses tipos, pois algumas situações elas passam de maneira tão sucinta, que caso o observador não esteja a par das propriedades dessas funções fica quase impossível visualizá-las e até mesmo de fazer um estudo dos impactos causados por tais fenômenos ou como ocorre determinado evento. Além disso, pode-se observar que a aplicações dessas funções ressaltadas nessa pesquisa são aplicações que promovem influencias em nosso cotidiano de duas maneiras: direta ou indireta; dependendo do que será analisando.

Neste trabalho, uma série de autores de diversas áreas do conhecimento foi destacada, tais como da Química, Biologia, Física e outros. Foram utilizadas referências que relataram sobre alguns dos casos comprovados das aplicabilidades dessas funções, mesmo por que, são tantos que não seria possível ressaltar todas, por isso realizou-se uma seleção dos mais relevantes. Relatou-se de maneira objetiva, descrevendo de forma teórica os aspectos de cada uma e simultaneamente, sua representação matemática que se realizou por meio de demonstrações matemáticas e consequentemente com algumas exemplificações de situações cotidianas, para descreverem e mostrar de fato a presença destas em nossa vida, mesmo que seja de forma indireta ou direta.

Portanto, o estudo teórico de maneira aprofundada dessas funções promove uma mudança sobre o conceito da sua utilidade, pois só assim percebe-se a relevância que a função logarítmica e sua inversa exercem de forma acintosa nas diversas áreas do conhecimento e atuando fortemente na compreensão de fenômenos que ocorrem em nosso meio cotidiano.

REFERÊNCIAS

BERTOLINO, Luiz Carlos. *Geologia*. Rio de Janeiro, 2005. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAABET8AI/apostila-geologia-bertolino>. Acesso em:11 jul. 2014 às 09:43.

BRONSON, Richard;COSTA, Gabriel B; tradução Fernando Henrique Silveira. *Equações Diferenciais*. 3.ed. Porto Alegre: Brookman, 2008.

COSTA, Alexandre, et al. *"Vida das estrelas." Brilho aparente das estrelas (NASA)*Disponível em:<http://scholar.google.com.br/scholar?cluster=9820047320144103747&hl=pt-BR&as_sdt=0,5>. Acesso em: 07 jul. 2014 às 10:42.

DENNIS G. Zill and Michael R. Cullen. *Equações Diferenciais*. Makron Books, São Paulo, 3. ed., 2001.

DICIO: Dicionário Online de Português, definições e significados de mais de 400 mil palavras. São Paulo, 2009 - 2014. Disponível em: <http://www.dicio.com.br/implicito/>. Acesso em: 16 Abr. 2014 às 23:36.

FELTRE, Ricardo. Química: Físico – Química. 6.d. São Paulo: Moderna, 2004.

FERNANDES, João Candido. *Acústica e Ruídos*. São Paulo, 2002. Disponível em: < http://resgatebrasiliavirtual.com.br/moodle/file.php/1/E-book/Materiais_para_Download/Ruido/Apostila%2520de%2520Ruido%2520I.pdf>. Acessado em: 10 jul. 2014 às 21:22.

FERREIRA, Roberto G.. *Matemática financeira aplicada: Mercado financeiro de capitais, administração financeira, finanças pessoais.* 6. Ed.. São Paulo: Atlas, 2008.

FONSECA, Carla Isabel Teixeira Tavares Rebimbas da. *As funções exponenciais e logarítmicas nos manuais escolares do 12º ano*. Dissertação Mestre em Didática, Universidade de Aveiro. Portugal em Aveiro, 2013. Disponível em:<http://ria.ua.pt/handle/10773/11585>. Acesso em: 08 mai. 2014 às 14:37.

GIMENES, Cristiano Marchi. *Matemática financeira com HP12c e Excel.* São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GAMA, Michelle da Silva. AFONSO, Júlio Carlos. *DE SVANTE ARRHENIUS AO PEAGÂMETRO DIGITAL: 100 ANOS DE MEDIDA DE ACIDEZ.* Departamento de Química Analítica, Instituto de Química, Universidade Federal do Rio de Janeiro, *Quim. Nova,* Vol. 30, No. 1, 232-239, 2007.

HENRIQUE, Cynthia Adeline Pinheiro. *Logaritmos e Terremotos: Aplicação da escala logarítmica nos abalos sísmicos*. UNIMESP – Centro Universitário Metropolitano de São Paulo. 2006. Disponível em: < http://www.cdb.br/prof/arquivos/76295_20080603084510.pdf >. Acesso em: 11 ago. 2014 às 23:32.

LAZARRINI, Victor E. P. *Elementos de Acústica.* Music Deparment – National University of Ireland, Maynooth. Disponível em: <http://www.fisica.net/ondulatoria/elementos_de_acustica.pdf> Acesso em 25 out. 2014 às 16:05.

LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. 2. ed. . Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.107 p. (Coleção do Professor de Matemática.)

MACARINI, Adriana Rodrigues Luz. *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: as estratégias de ensino como potencializadoras de aprendizagem.* Dissertação (Mestrado de Educação). Universidade do Vale do Itajaí (UNIVALI), Santa Catarina, 2007. Disponível em: <http://www6.univali.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=500>.Acesso: 01 mai. 2014 às 15:46.

MARCHI, Elisa Stupp de. *Portal dia a dia Educação – Disciplina Geografia*. Paraná. Disponível em:<GEOGRAFIA.SEED.PR.GOV.BR>. Acesso em 01 de nov. 2014 às 23:53.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. *Matemática financeira.* 6. ed.. São Paulo: Atlas, 2009.

MUCELIN, Neusa Idick Scherpinski. *Matemática, música e terremoto, o que há em comum?* Matemática/vários autores. – Curitiba: SEED-PR, 2006. p.65 – 75. Disponível em:<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/livro_didatico/matematica.pdf>. Acesso em: 08 Ago. 2013.

NETO, Joaquim Lopes. *Espirais*. Dissertação de Mestrado Profissional em ensino de Física. Instituto de Física – UFRJ. Rio de Janeiro. 2008. Disponível em:<http://www.pucrs.br/research/salao/2008-IXSalaoIC/index_files/main_files/trabalhos_sic/ciencias_exatas/matematica/61686.pdf> Acesso: 13 de julho de 2014 às 08: 00

ODUM, Eugene P. *Fundamentos da Ecologia*. 6ª ed. Fundação Caloueste Gulbenkian. 2001. Disponível em: <http://ferdesigner.files.wordpress.com/2010/11/fundamentos-de-ecologia-odum.pdf.>
05 jul. de 2014 às 19:25

ORTIZ, Roberto. *O brilho aparente e a luminosidade das estrelas.* EACH/USP, [s.d.].
PEREIRA, Maria Emília. *Noções de Matemática Financeira*. Lorena – SP. 2006. Disponível em: <http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/trab_finais/TrabalhoMariaEmilia.pdf. >. Acesso em 13 out. 2014 às 21:50.

PERONI, Nivaldo; HERNÁNDEZ, Malva Isabel Medina. *Ecologia de Populações e Comunidades.* Florianópolis, 2011. Disponível em: <http://lecota.paginas.ufsc.br/files/2011/09/Livro-Ecologia-de-Populacoes-e-Comunidades.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2014 às 11:51.

PUPIM, Claudio Eduardo. *A matemática na natureza.* Dissertação (Mestrado profissional em Matemática – PROFMAT Sociedade Brasileira de Matemática). Mato Grosso do Sul – Dourados, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/347/2011_00213_CLAUDIO_EDUARDO_PUPIM.pdf?sequence=1>. Acesso em: 13 jul. 2014 ás 22:00.

PUCCINI, Ernesto Coutinho. *Matemática financeira e análise de investimentos.* Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração / UFSC; [Brasília]: CAPES: UAB, 2011.

SANTORO, Antônio César Baroni. *Química: Equilíbrios nas Reações Químicas*. Material do Sistema Ético de Ensino. Editora Saraiva. 2013.

SANTOS, Reginaldo J. *Introdução a Equações Diferenciais Ordinárias.* Departamento de Matemática-ICEx. Universidade Federal de Minas Gerais. 2011. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~regi>. Acessado em: 02 nov. 2014 às 14:00.

SEEWALD, Nick. *The Logarithmic Spiral.*[s.d.] Disponível em:<http://goldenratiomyth.weebly.com/the-logarithmic-spiral.html> Acesso em: 25 out. 2014 às 21: 43h

SODRÉ, Ulysses. *Equações Diferenciais Ordinárias:Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil.* Notas de aulas – 21 mai. 2003. Disponível em: <http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pdfs/edo.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2014 às 00: 26.

TAKEDA, Mauro Noriaki; MORCELLI, Aparecido Edilson. *Física Geral e Experimental I*. 2012. Disponível em: <http://www.unisa.br/conteudos/6291/f1338679502/apostila/apostila.pdf> 29 out. de 2014 às 16:06

TEIXEIRA, Wilson; et al. *Decifrando a Terra*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2008.

WEYNE, Gastão R. de Sá, et al. *Metodologia para o cálculo do valor de pH em soluções aquosas de ácidos fracos monopróticos. Uma revisão nos livros de graduação.* Integração. Ano XIII, p.371 – 376, n. 51, out. nov. dez. 2007. Disponível em: <ftp://ftp.usjt.br/pub/revint/371_51.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2014 ás 12:09.

ZAVALA, Alessandra B. P. *Aplicações de Fenômenos Exponenciais e Logarítmicos em Sala de Aula.* Departamento de Matemática – UFPR. Curitiba - PR, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/454/2011_00343_ALESSANDRA_BEATRIZ_PACHAS_ZAVALA.pdf?sequence=1>. Acesso 08 mai. 2014 às 10:40.