

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS**  
**CÂMPUS NORTE**  
**UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE PORANGATU**  
**CURSO DE MATEMÁTICA**

**EIDY LORRANY DE LIMA MARQUES**

**O PRINCÍPIO DE CAVALIERI NO ENSINO MÉDIO: Uma  
abordagem didática alternativa para o estudo de volumes**

**PORANGATU – GOIÁS**  
**2023**

**EIDY LORRANY DE LIMA MARQUES**

**O PRINCÍPIO DE CAVALIERI NO ENSINO MÉDIO: Uma  
abordagem didática alternativa para o estudo de volumes**

Trabalho de Curso apresentado em cumprimento parcial às exigências da disciplina de Trabalho de Curso II, referente ao curso de graduação em Matemática da Universidade Estadual de Goiás – UnU de Porangatu, como pré-requisito à obtenção do título de licenciado, sob orientação do professor: Me. Herbert Wesley Azevedo

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UEG  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M357p MARQUES, EIDY LORRANY DE LIMA  
O PRINCÍPIO DE CAVALIERI NO ENSINO MÉDIO: Uma  
abordagem didática alternativa para o estudo de volumes  
/ EIDY LORRANY DE LIMA MARQUES; orientador HERBERT  
WESLEY AZEVEDO. -- Porangatu, 2023.  
25 p.

Graduação - Matemática -- Unidade de Porangatu,  
Universidade Estadual de Goiás, 2023.

1. Princípio de Cavalieri. 2. Ensino de Matemática.  
3. Ensino Médio. 4. Cálculo de Volumes. 5. Abordagem  
Alternativa. I. AZEVEDO, HERBERT WESLEY, orient. II.  
Titulo.

EIDY LORRANY DE LIMA MARQUES

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI NO ENSINO MÉDIO: Uma abordagem didática alternativa para o estudo de volumes

Artigo de Conclusão de Curso apresentado como parte do requisito para a obtenção do título de Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás – Unidade Universitária de Porangatu.

Aprovada em 15, de dezembro, de 2023, pela banca examinadora constituída pelos professores:

*Herbert Wesley Azevedo*

Prof.º Me Herbert Wesley Azevedo – Orientador

*Sônia M<sup>a</sup> de Andrade Silva*

Prof.<sup>a</sup> Sônia Maria de Andrade Silva - Avaliadora

*Fabrinny Aparecida Souza Mesquita*

Prof.<sup>a</sup> Esp. Fabrinny Aparecida Souza Mesquita - Avaliadora

## O PRINCÍPIO DE CAVALIERI NO ENSINO MÉDIO: Uma abordagem didática alternativa para o estudo de volumes<sup>1</sup>

EIDY LORRANY DE LIMA MARQUES<sup>2</sup>

HERBERT WESLEY AZEVEDO<sup>3</sup>

### RESUMO

O presente trabalho propõe uma abordagem para o ensino de volumes no Ensino Médio, destacando o uso do Princípio de Cavalieri como uma ferramenta educacional importante. O objetivo principal é analisar a viabilidade e eficácia desse procedimento alternativo em comparação com os métodos tradicionais de cálculo de volumes. Esta pesquisa é uma pesquisa bibliográfica e documental que é dividida em três etapas distintas. Inicialmente, uma revisão teórica é conduzida, explorando a literatura existente sobre o Princípio de Cavalieri e sua aplicabilidade no contexto educacional posteriormente, além do uso de alguns livros didáticos, também foi feita a seleção dos conteúdos pesquisados e por fim, a produção textual. Serão utilizados estudos de vários autores como Pontes (2014), Tose (2017) entre outros. A problemática abordada neste estudo visa encontrar soluções para desafios reais no ensino de Matemática, com potencial para melhorar a qualidade da educação e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Isso não apenas enriquece o âmbito acadêmico e científico, mas também tem o potencial de transformar a experiência educacional com base nas análises dos livros didáticos. Os resultados obtidos nesta pesquisa contribuirão para uma compreensão mais aprofundada da importância do Princípio de Cavalieri como ferramenta de ensino. Além disso, será uma base importante de conhecimento que apresenta algumas reflexões teóricas relacionadas ao como tornar o ensino de volumes mais compreensível e envolventes aos alunos.

**Palavras-chave:** Princípio de Cavalieri; Ensino de Matemática; Ensino Médio; Cálculo de Volumes; Abordagem Alternativa.

---

<sup>1</sup> Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado a banca como exigência para a obtenção do grau de licenciatura em Matemática na Universidade Estadual de Goiás.

<sup>2</sup> Acadêmica do Curso de Matemática, da Universidade Estadual de Goiás, Campus Norte, Unidade Universitária de Porangatu. E-mail: eidylorrany@gmail.com

<sup>3</sup> Professor do Curso de Matemática, da Universidade Estadual de Goiás, Campus Norte, Unidade Universitária de Porangatu. E-mail: herbert.azevedo@ueg.br

## 1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática consiste em um momento essencial para formação dos estudantes, proporcionando a base necessária para o desenvolvimento de habilidades e competências que lhes permitirão resolver problemas em diversos contextos. A compreensão e aplicação de conceitos relacionados ao cálculo de volumes de objetos tridimensionais desempenham um papel fundamental. A mensuração de grandezas tridimensionais está intrinsecamente presente em muitos aspectos do cotidiano, desde o cálculo de capacidades de recipientes até a análise de sólidos utilizados na engenharia e na arquitetura.

A problemática que estrutura este trabalho acadêmico busca questionar de que forma o Princípio de Cavalieri é aplicado em livros didáticos, apontando os aspectos relacionado a apresentação das informações com base na clareza, organização, exemplos, nível de aprofundamento do tema, entre outros que permitem ao leitor uma compreensão didática.

Este estudo também se propõe a explorar uma abordagem alternativa para o ensino de volumes no Ensino Médio, com foco no Princípio de Cavalieri e a forma que é inserido no contexto dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. Este princípio oferece uma perspectiva geométrica e intuitiva para o cálculo de volumes, baseando-se na análise de áreas de seções transversais de sólidos. O uso do Princípio de Cavalieri como ferramenta educacional pode representar uma alternativa promissora ao ensino tradicional de volumes, simplificando o processo e tornando-o mais acessível aos alunos.

Para Tose (2017) as metodologias de ensino e seus recursos são ferramentas importantes no processo de ensino/aprendizagem. De fato, essas metodologias desempenham um papel essencial ao promover uma interação eficaz entre professores e alunos, facilitando a transmissão e a absorção de conhecimento de forma significativa. No entanto, é importante ressaltar que isso não significa que o método tradicional de exposição do conteúdo deva ser desconsiderado; pelo contrário, ele ainda desempenha um papel fundamental no processo educacional, complementando as abordagens metodológicas.

O desenvolvimento deste estudo é estruturado na metodologia de pesquisa envolvendo a natureza de pesquisa bibliográfica e documental que corresponde as seguintes etapas: o levantamento teórico, onde serão feitas pesquisas de estudo de

autores que abordam o tema, além de analisar alguns livros didáticos antigos e o de uso atual no ensino médio. Posteriormente, foram feitas leituras e seleção das informações coletadas, e por fim, a produção textual do artigo.

No primeiro capítulo, será apresentado o referencial teórico sobre o conceito de Princípio de Cavalieri, oferecendo uma sólida fundamentação para a compreensão deste importante princípio matemático. Serão abordadas suas origens históricas, a evolução do pensamento matemático que levou à sua formulação e os fundamentos teóricos que o sustentam. Além disso, serão discutidas as aplicações práticas do Princípio de Cavalieri em diversos contextos, destacando sua relevância tanto na história da matemática quanto nas aplicações contemporâneas.

No segundo capítulo, será apresentada uma análise aprofundada do conteúdo relacionado ao Princípio de Cavalieri nos livros didáticos do ensino médio. Essa análise abrangerá diversos aspectos, incluindo a qualidade do conteúdo apresentado, a complexidade das informações fornecidas, a clareza na explicação -do conceito, bem como outros critérios relevantes para a eficácia pedagógica.

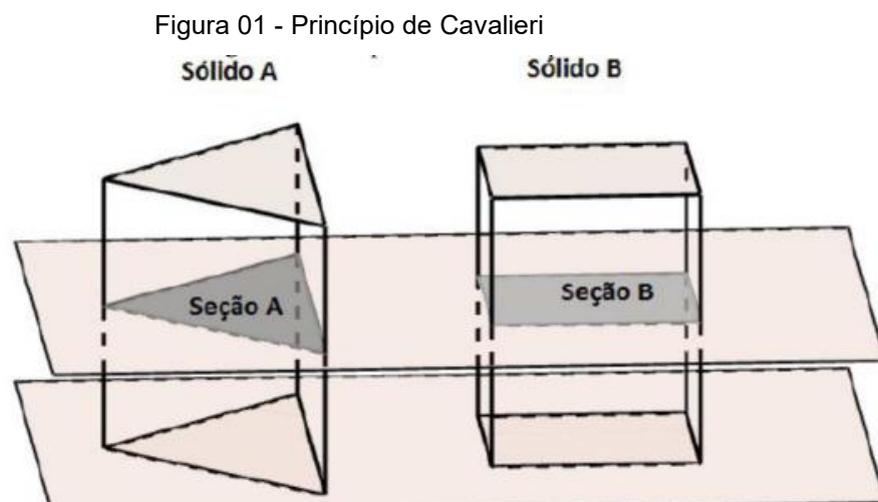
Para enriquecer ainda mais essa análise, serão propostas atividades específicas relacionadas ao tema, desenvolvidas com base na pesquisa conduzida por Cunha (2019). Essas atividades serão fundamentais para avaliar a aplicabilidade prática do Princípio de Cavalieri, proporcionando aos estudantes a oportunidade de aplicar os conhecimentos adquiridos de maneira ativa e participativa.

Os resultados finais deste trabalho acadêmico possibilitam apresentar análises importantes da qualidade do conteúdo dos livros didáticos, pois a qualidade do material didático vai refletir na qualificação do processo de ensino e aprendizagem. Além disso, podemos contribuir para inspirar novas estratégias de ensino em outras áreas da Matemática e disciplinas relacionadas, promovendo uma educação mais envolvente e significativa.

## 2 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

O Princípio de Cavalieri é um conceito fundamental na geometria que teve origem no século XVII e continua a desempenhar um papel significativo na matemática. Este princípio, nomeado em homenagem ao matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647), oferece uma abordagem para o cálculo de volumes de sólidos e ainda é amplamente utilizado e estudado. (AMAZONAS, 2013)

De acordo com Pontes (2014); Cunha (2019) a história do Princípio de Cavalieri remonta ao livro "Geometria degli indivisibili," publicado por Cavalieri em 1635. Neste livro, Cavalieri introduziu uma ideia que consiste na comparação de volumes de sólidos por meio da análise de áreas de seções transversais. Cavalieri percebeu que, se dois sólidos têm a mesma altura e seções transversais de áreas iguais quando cortados por planos paralelos, então esses sólidos têm o mesmo volume como observado na figura 01 a seguir:



Fonte: Cunha (2019, p. 25)

Conforme a figura, se cortarmos ambos com planos paralelos e as seções transversais resultantes tiverem a mesma área em cada altura específica, então, de acordo com o Princípio de Cavalieri, esses cilindros terão o mesmo volume. Isso significa que a forma exata do sólido não é crucial; o que importa é a área da seção transversal em diferentes alturas.

É importante notar que essa abordagem matemática é muito mais antiga do que a contribuição de Cavalieri. Conforme Partelini (2010) ela era conhecida e utilizada por antigos matemáticos gregos como Demócrito (460-370 a.C.) e

Arquimedes (287-212 a.C.) para calcular volumes de sólidos. Na ausência de uma teoria de integração naquela época, eles demonstravam esses resultados por meio de métodos como a "dupla redução ao absurdo." A mesma abordagem foi adotada por muitos matemáticos dos séculos XVI e XVII.

O Princípio de Cavalieri permanece como uma ferramenta poderosa na Geometria. Para Tose (2017) o Princípio de Cavalieri é, de fato, uma ferramenta matemática fundamental no cálculo de volumes de sólidos. Sua importância reside na sua capacidade de simplificar o cálculo de volumes, tornando acessível a resolução de problemas que, de outra forma, exigiriam técnicas avançadas de cálculo diferencial e integral. Além disso, uma das características mais valiosas do Princípio de Cavalieri é a sua abordagem intuitiva e geométrica. Ele permite que os estudantes e matemáticos considerem a relação entre áreas de seções transversais e volumes de sólidos sem a necessidade de recorrer a fórmulas complicadas ou integração.

No contexto do Ensino Médio, Amazonas (2013) aborda que quando exploramos o cálculo de volumes de sólidos, recorreremos ao Princípio de Cavalieri, que envolve a comparação de sólidos nos quais a razão entre as áreas das seções transversais é igual a 1. Quando essa razão é 1, significa que as áreas das seções são idênticas. Portanto, nesses casos, os princípios do Princípio de Cavalieri, que geralmente estão presentes em livros didáticos, se tornam mais simples e diretos.

Neste sentido, não há um aprofundamento conceitual e nos cálculos do Princípio de Cavalieri, e o mesmo se constitui apenas para dar base para calcular os volumes de sólidos. Já no estudo de Pontes (2014) é apresentado um conteúdo teórico que orienta a prática escolar envolvendo uma abordagem com base numa ideia intuitiva do conceito de volume, por meio de exemplos realistas antes da apresentação do conceito para os alunos. Essa estratégia pedagógica visa tornar a Matemática mais acessível e compreensível para os alunos, especialmente quando se trata de conceitos abstratos como volume.

Para exemplificar, na primeira situação indica que se quisermos determinar qual entre uma garrafa e uma panela tem um volume maior, podemos realizar um teste simples. Basta encher a garrafa com água e despejá-la na panela. Se a água transbordar, isso indica que a garrafa tem um volume maior; caso contrário, o volume da panela é maior. No entanto, quando se trata de comparar o volume de objetos impermeáveis, como um parafuso, por exemplo, a abordagem é um pouco diferente. Utilizando um recipiente de vidro com um marcador de volume e preenchendo-o com

água até um nível específico (por exemplo, até a metade), ao inserir o objeto irregular, como o parafuso, o nível da água aumentará. Esse aumento no nível de água no recipiente é então considerado como o volume do objeto inserido.

Na segunda situação, podemos realizar outro experimento utilizando um copo e uma panela. Ao encher repetidamente o copo e despejar na panela até que esta esteja completamente cheia, conseguimos determinar o volume da panela. Se considerarmos o copo como a unidade de medida, podemos dizer que, por exemplo, se foram necessários três copos cheios de água para encher a panela, o volume da panela será de três copos. No entanto, é importante ressaltar que resultados inteiros, como esse exemplo, são pouco prováveis, pois raramente o volume será representado por um número inteiro nesse contexto.

Dessa forma, Pontes (2014) comenta que ao introduzir exemplos práticos e comparações, os professores podem envolver os alunos de forma ativa no processo de aprendizado. Eles podem explorar objetos do cotidiano, como caixas, recipientes ou até mesmo a sala de aula, para calcular volumes de maneira prática. Essas atividades provocam a atenção dos alunos e os incentivam a pensar criticamente sobre como o volume é calculado e por que é relevante.

Nesta perspectiva, Garavello (2013, p. 09) afirma que:

Com a aplicação do Princípio de Cavalieri é possível caracterizar boas demonstrações de volumes de sólidos geométricos e o cálculo de áreas de figuras planas estudadas nos Ensino Fundamental e Médio do Ensino Básico, mesmo sem que os alunos saibam de sua demonstração.

Sendo assim, essa abordagem prática ajuda os alunos a desenvolver uma intuição matemática. Eles aprendem a reconhecer padrões e relações entre áreas de seções transversais e volumes de sólidos sem precisar de uma compreensão matemática abstrata completa. Isso contribui para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico.

Ao contextualizar os conceitos matemáticos em situações práticas e do cotidiano, os alunos podem compreender a importância da matemática em suas vidas. Além disso, eles podem desenvolver habilidades de pensamento lógico-dedutivo que são valiosas não apenas na matemática, mas em todas as áreas do conhecimento. (PASSOS; GOES, 2008)

Cunha (2019) considera o Princípio de Cavalieri como uma ferramenta para o cálculo de volumes de sólidos geométricos no Ensino Médio em que busca aplicar com base no uso de materiais concretos e do *software* de geometria dinâmica GeoGebra. A proposta de utilizar o *software* GeoGebra e a impressão 3D como ferramentas para ensinar o Princípio de Cavalieri, como uma abordagem pedagógica inovadora e altamente relevante. Ela possibilita aguçar a curiosidade e o interesse dos alunos, tornando o aprendizado da matemática mais envolvente e acessível.

No que se refere ao *software* GeoGebra, por sua capacidade de simulação geométrica e algébrica, ele destaca que é uma ferramenta poderosa para visualizar conceitos matemáticos, em que a visualização desempenha um papel fundamental no ensino da geometria, pois ajuda os alunos a compreenderem abstrações matemáticas de maneira mais concreta. Assim, a proposta de utilizar o GeoGebra para explorar dinamicamente sólidos geométricos e o Princípio de Cavalieri permite que os alunos vejam as relações entre áreas de seções transversais e volumes de maneira tangível. Contudo, Cunha (2019) ressalta que a implementação eficaz do GeoGebra nas escolas pode enfrentar desafios, como a falta de estrutura de laboratórios de informática e a necessidade de capacitação de professores. Portanto, é importante que haja suporte e incentivo para que os professores adquiram as habilidades necessárias para operar essa ferramenta valiosa.

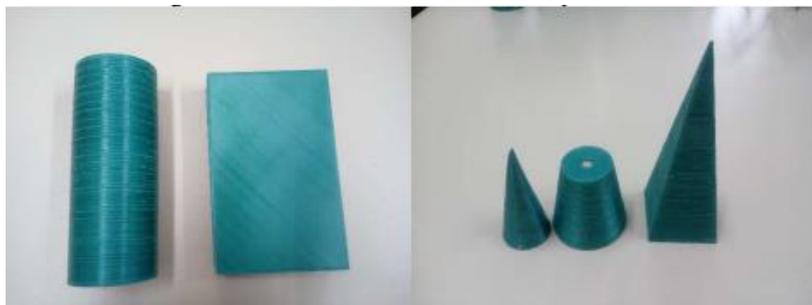
A impressão 3D é outra ferramenta inovadora apresentada pelo autor, que pode ser explorada para criar modelos físicos de sólidos geométricos, permitindo que os alunos manipulem e explorem esses objetos tridimensionais de forma concreta. Essa abordagem prática enriquece a compreensão dos alunos e os envolve em atividades de aprendizado mais imersivas. (CUNHA, 2019)

Em seu estudo, Cunha (2019) desenvolveu uma atividade na figura 02 e 03 onde foram distribuídos aos participantes kits contendo materiais concretos elaborados por meio de impressão 3D. Essa etapa visava proporcionar aos envolvidos o primeiro contato prático com o material, despertando curiosidade e estimulando a participação ativa. Durante a distribuição, surgiram diversas perguntas acerca do processo de confecção desses materiais, momento no qual foi oferecida uma explicação detalhada sobre o funcionamento da impressora 3D. Cada kit disponibilizado compreendia quatro sólidos geométricos impressos, cada um representando diferentes formas tridimensionais sendo um cilindro de raio  $R$  e altura  $H$ ; um paralelepípedo de bases medindo  $R$  e  $r$  e altura  $H$ ; um cone de raio  $R$  e altura  $H$ .

H, seccionado paralelamente à base em uma altura  $h$ ; e de altura  $H$ , seccionada paralelamente à base na mesma altura  $h$  que o cone.

As dimensões dos sólidos em cada conjunto eram distintas, conferindo singularidade a cada conjunto. A intenção inicial consistia em orientar os alunos a realizar medições e cálculos das áreas das bases do cilindro e do paralelepípedo. Ao comparar essas áreas, a expectativa era que percebessem uma proximidade significativa nos valores. Para conduzir essa atividade, foi disponibilizado um questionário que desempenhou o papel de um guia de estudos, fornecendo direcionamento para as análises a serem realizadas. (CUNHA, 2019)

Figura 02 - Sólidos confeccionados em impressão 3D



Fonte: Cunha (2019, p. 12)

Figura 03 – Questionário

1 – Trabalhando com o cilindro e o paralelepípedo. (Compare os sólidos de forma que ambos possuam a mesma altura).

- Meçam os elementos necessários para calcular a área da base do cilindro e do paralelepípedo. Preencha os valores obtidos no Quadro 1?
- Calcule a área dessas bases e preencha o Quadro 1. O que vocês concluem sobre essas áreas?

Quadro 1 – As medidas do cilindro e do paralelepípedo

	Cilindro		Paralelepípedo
Medidas	_____	Medidas	_____
Área da base	_____	Área da base	_____

Conclusão: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

c) Qual o volume desses sólidos?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Fonte: Cunha (2019, p. 12)

A partir dessa atividade podemos compreender de forma prática a compreensão do Princípio de Cavalieri. Assim, a análise teórica neste capítulo envolve o contexto prático do objetivo de estudo e contribui para a compreensão desta

pesquisa acadêmica, a qual busca analisar o conteúdo de Princípio de Cavalieri em alguns livros didáticos do Ensino Médio, apresentado no capítulo seguinte.

### **3 ANÁLISE DO CONTEÚDO DE PRINCÍPIO DE CAVALIERI NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO**

No presente estudo, foram analisados três livros didáticos de Matemática do 2º ano do ensino médio, os quais Bordeaux et. al. (2005), lezzi *et. al.* (2010) e Bonjorno, Júnior e Souza (2020) apresentam suas formas metodológicas de ensino para o desenvolvimento do conteúdo curricular relativo ao Princípio de Cavalieri. O livro de Bonjorno, Júnior e Souza (2020) é atualmente usados nos colégios Stelannis Kopanakis Pacheco e pelo Colégio Waldemar Lopes do Amaral Brito.

O primeiro livro didático analisado foi o de Bonjorno, Júnior e Souza (2020) abordou sobre Princípio de Cavalieri de forma bem sintetizada, utilizando de exemplos concretos em formato de desenhos com traços apresentando informações para o desenvolvimento de cálculos matemáticos, na figura 03.

Os autores são bem didáticos nas explicações e possui clareza nas informações explicativas. É notável que o conteúdo pela sua qualidade, tem uma grande probabilidade de atingir o seu objetivo curricular para a qualificação da aprendizagem do aluno, em que, sua objetividade informacional contribui para esse êxito curricular.

Eles deixam claro que a intenção não é de aprofundar no conteúdo conceitual do Princípio de Cavalieri, e trata como base teórica verdadeira para a prática de ensino de Matemática, visando cálculos para a medição de volumes de sólidos.

O segundo livro didático analisado foi de lezzi *et. al.* (2010), na figura 05, o qual explica em seu livro didático, sobre o Princípio de Cavalieri através de dois exemplos, os quais são analisados de forma detalhada. No entanto, o nível de profundidade pode ser um aspecto negativo, pois a temática é bem complexa. Além de que a parte de aplicação do Princípio possui cálculos bem aprofundados, e ao contrário de Bonjorno, Júnior e Souza (2020) não utiliza exemplos práticos na explicação do conteúdo.

Já no livro terceiro livro analisado, foi o livro didático de Bordeaux et. al. (2005), figura 05, onde é utilizado um exemplo concreto para a compreensão baseada em uma visualização de materiais, consistindo em cartas de baralho.

Bordeaux et. al. (2005) discorre sobre esse exemplo, em que, é feito a analogia de uma pilha formada por cartas de baralho provenientes de quatro ou cinco jogos distintos. É possível criar pilhas de variadas formas, desde que compartilhem a mesma base e altura.

O volume da pilha é a soma dos volumes das cartas, e dado que as cartas são idênticas, as pilhas, apesar de possuírem formas distintas, têm volumes iguais. Tomemos como exemplo duas pilhas: a primeira tem a configuração de um bloco retangular (ou paralelepípedo retângulo), composto por seis retângulos, sendo as faces opostas idênticas. A terceira pilha, por sua vez, assume a forma de um paralelepípedo oblíquo, com arestas laterais não perpendiculares à base, resultando em faces laterais que são paralelogramos.

Apesar da mudança de forma da pilha 1 para a pilha 3, o volume permanece inalterado. Essa constância é derivada do fato de que ambos os paralelepípedos compartilham a mesma base, altura e volume. Ao aplicar o raciocínio de Cavalieri, concluímos que o volume do paralelepípedo da pilha 3 é equivalente ao produto da área de sua base pela altura.

A capacidade de calcular o volume de um paralelepípedo oblíquo, que não pode ser decomposto em cubinhos unitários, ilustra a ideia central de Cavalieri, previamente explorada por Arquimedes. Essa ideia fundamental consiste em conceber um sólido desmembrado em camadas extremamente finas, assemelhando-se às cartas de um baralho. Quando dois sólidos são constituídos por camadas idênticas, com a mesma área e espessura, seus volumes são equivalentes.

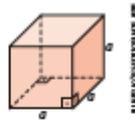
Deste modo, as informações sobre o Princípio de Cavalieri nesta obra são insuficientes para a compreensão significativa do conteúdo, faltando exemplos com explicações objetivas como no livro de Bonjorno, Júnior e Souza (2020) que possui uma apresentação mais didática, permitindo ao leitor realizar uma leitura eficaz e compreensão mais abrangente, como mostra na figura 04:

Figura 04 – Estrutura do conteúdo sobre o Princípio de Cavalieri.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD  
REPRODUÇÃO PROIBIDA

### Volume de um cubo

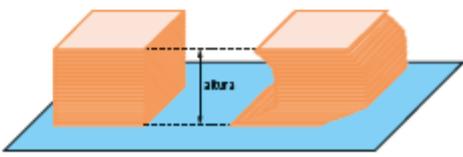
Em um cubo, as três dimensões têm a mesma medida  $e$ , indicando cada uma delas por  $a$ , seu volume é dado por:

$$V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow V = a^3$$


### Princípio de Cavalieri

Apresentamos o cálculo que determina o volume do paralelepípedo reto retângulo e do cubo. No entanto, a fórmula para o cálculo do volume de outros sólidos pode não ser tão simples assim e, para estabelecê-la, precisamos de um resultado matemático, conhecido como princípio de Cavalieri.

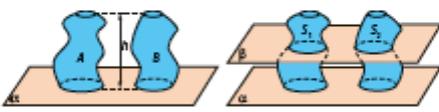
Vamos considerar duas pilhas de papel sulfite idênticas com a mesma quantidade de folhas em cada pilha, colocadas sobre uma mesa.



Essas pilhas podem ser dispostas sobre a mesa de diferentes formas, como podemos observar na figura. Observe que qualquer plano paralelo ao plano da mesa que intersecta as pilhas determinará intersecções de mesma área, que poderemos considerar como uma folha de sulfite. Além disso, em ambas as pilhas, temos a mesma quantidade de folhas, ou seja, as pilhas têm o mesmo volume. Essa é a ideia do princípio de Cavalieri.

**SABIA QUE...**  
O princípio de Cavalieri foi desenvolvido pelo matemático italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

Considere dois sólidos  $A$  e  $B$  de mesma altura com as bases contidas em um mesmo plano horizontal  $\alpha$ . Traçando um plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$  e secante aos sólidos, determinamos duas secções transversais cujas áreas são  $S_1$  e  $S_2$ .



O princípio de Cavalieri afirma que, se para todo plano  $\beta$ , nas condições anteriores, tivermos  $S_1 = S_2$ , então os sólidos  $A$  e  $B$  terão o mesmo volume.

O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado; no entanto, não o faremos aqui por envolver conceitos matemáticos que não são estudados no Ensino Médio. Vamos considerá-lo verdadeiro e aplicá-lo para a determinação do volume de alguns sólidos.

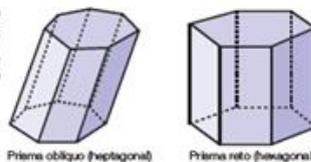
Fonte: Bonjorno, Júnior e Souza (2020)

Dessa forma, em uma perspectiva comparativa dos livros, Bonjorno, Júnior e Souza (2020) se sobressai pela didática que permite uma clareza nas informações e exemplos que garantem uma aprendizagem mais satisfatória dos estudantes, e mais ainda para o docente em seu processo de ensino curricular.

Os outros livros didáticos, de Bordeaux et. al. (2005) e de Iezzi et. al (2010), deixaram uma percepção negativa do conteúdo analisado, faltando informações ou apresentando informações complexas e em excesso como observado nas figuras seguintes:

Figura 05 – Estrutura do conteúdo sobre o Princípio de Cavalieri.

Em segundo lugar, os prismas podem diferir dependendo de suas arestas laterais serem ou não perpendiculares às bases. Quando as arestas laterais são perpendiculares à base, dizemos que o prisma é reto. Quando elas não são perpendiculares à base, dizemos que o prisma é oblíquo.



■ Resolva agora o Exercício 2.

### O PRINCÍPIO DE CAVALIERI: A PILHA ENTORTA E O VOLUME SE MANTÉM

Para compreender as idéias de Bonaventura Cavalieri (matemático italiano que viveu no século XVII), vamos imaginar uma pilha formada com as cartas de quatro ou cinco jogos de baralho. Podemos formar pilhas de várias formas, que tenham a mesma base e a mesma altura.

O volume da pilha é a soma dos volumes das cartas e, como as cartas são as mesmas, as pilhas têm o mesmo volume, apesar de terem formas diferentes.



A primeira pilha tem a forma de um bloco retangular (ou paralelepípedo retângulo). É um sólido delimitado por seis retângulos e as faces opostas são retângulos idênticos. A terceira pilha tem a forma de um paralelepípedo oblíquo (as arestas laterais não são perpendiculares à base). Suas bases são retângulos, mas suas faces laterais são paralelogramos. Da pilha 1 para a pilha 3, houve mudança de forma, mas o volume permaneceu inalterado. Como os paralelepípedos das pilhas 1 e 3 têm a mesma base, a mesma altura e o mesmo volume, e como o volume do paralelepípedo da pilha 1 é igual ao produto da área da sua base pela sua altura, concluímos que o volume do paralelepípedo da pilha 3 também é igual ao produto da área da sua base pela sua altura. Além, os volumes dos quatro sólidos mostrados acima são iguais entre si.

Desse modo, conseguimos calcular o volume de um paralelepípedo oblíquo, que não pode ser decomposto em cubinhos unitários. O cálculo do volume desse sólido ilustra a idéia central de Cavalieri, já trabalhada por Arquimedes. Essa idéia consiste em imaginar um sólido decomposto em camadas muito finas, como as cartas de um baralho. Se dois sólidos forem constituídos por camadas iguais, de mesma área e de mesma espessura, então seus volumes são iguais.

Fonte: Bordeaux *et. al.* (2005)

Figura 06 – Estrutura do conteúdo sobre o Princípio de Cavalieri.

b) o volume do vidro utilizado na sua confecção.

**Princípio de Cavalieri**

Conseguimos estabelecer uma fórmula para o volume de um paralelepípedo retângulo de maneira intuitiva; entretanto, para determinar a expressão do volume de outros sólidos, o processo não é tão simples. Uma maneira que pode ser utilizada para a obtenção do volume de um sólido é adotar como axioma um resultado formalizado pelo matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que é conhecido como princípio de Cavalieri.

Antes de enunciar o princípio de Cavalieri, vamos apresentar um exemplo para que ele possa ser compreendido de maneira intuitiva:

**4 Exemplo**

Dispõe-se de um conjunto de chapas retangulares de madeira, todas com as mesmas dimensões e, consequentemente, com o mesmo volume. Imagine que elas foram usadas para formar duas pilhas diferentes, cada qual com a mesma quantidade de chapas, como mostram as figuras 1 e 2:

Note que, em ambas as pilhas, a quantidade de espaço ocupado pela coleção de chapas é a mesma, isto é, os sólidos das figuras 1 e 2 têm o mesmo volume.

Imagine agora esses mesmos sólidos com bases num mesmo plano  $\alpha$  e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por  $\alpha$ :

volumes iguais

Fonte: lezzi *et. al.* (2010)

A análise dos livros didáticos é de grande relevância para a compreender as diferentes formas de aplicação do conhecimento matemático, e nos permite apresentar outras práticas curriculares que possam agregar na qualidade do ensino e da aprendizagem como as atividades que serão apresentadas a seguir.

### 3.1 ATIVIDADES:

As atividades didáticas abaixo, foram formuladas com base na pesquisa desenvolvida por Cunha (2019) com alunos do 3º ano do ensino médio, as quais têm como o objetivo de utilizar o Princípio de Cavalieri como meio para calcular volumes de sólidos geométricos, além da contextualização de sua história. Essa exploração pode ser realizada por meio da manipulação de materiais físicos e da incorporação de objetos de aprendizagem.

A proposta de atividade curricular centrada no Princípio de Cavalieri representa uma abordagem inovadora e envolvente para o ensino do conceito matemático em questão. A metodologia sugerida vai além da simples apresentação de fórmulas, buscando proporcionar aos alunos uma compreensão mais ampla e contextualizada. O ponto de partida é a exploração da história de Bonaventura Cavalieri, situando os alunos no contexto histórico em que viveu. Essa abordagem permite que os estudantes compreendam como as condições da época moldaram as contribuições de Cavalieri para a matemática, estabelecendo uma conexão mais profunda entre o conteúdo matemático e seu contexto histórico.

A proposta também destaca as principais contribuições de Cavalieri para a ciência e a matemática, com ênfase especial no método dos "indivisíveis". Esse enfoque não apenas aborda aspectos matemáticos, mas também ressalta a importância desse método na evolução do pensamento matemático. As atividades práticas propostas são fundamentais para consolidar o entendimento dos alunos, permitindo a manipulação de sólidos geométricos, como cilindro e paralelepípedo. Essas atividades tangíveis visam proporcionar uma compreensão mais concreta do Princípio de Cavalieri.

A inclusão de questões analíticas desafia os alunos a refletirem sobre as implicações das descobertas de Cavalieri, questionando a aceitação de suas teorias na época e explorando as aplicações práticas do Princípio de Cavalieri em situações do mundo real. A aplicação prática do Princípio de Cavalieri, especialmente na

resolução de problemas específicos relacionados ao cálculo de áreas de bases de sólidos e à relação entre volumes de diferentes formas, destaca a utilidade prática desse conceito.

Quanto aos resultados esperados, a proposta visa não apenas à transmissão de conhecimentos matemáticos, mas também ao desenvolvimento de uma compreensão profunda do Princípio de Cavalieri. Pretende-se que os alunos adquiram habilidades analíticas, críticas e reflexivas, capacitando-os a contextualizar o conhecimento matemático de maneira mais ampla. A aplicação prática do Princípio de Cavalieri em situações do mundo real prepara os alunos para desafios além do ambiente de sala de aula, promovendo uma aprendizagem mais significativa. A abordagem interdisciplinar, estabelecendo conexões entre a matemática e outros campos do conhecimento, enriquece ainda mais a experiência educacional.

### **3.1.1 Atividades sobre a História de Cavalieri**

#### **3.1.1.1 Questão 01**

Descreva o contexto histórico em que Bonaventura Cavalieri viveu. Como esse período influenciou suas contribuições para a matemática?"

Resposta: Bonaventura Cavalieri viveu no período do início do século XVII, um momento marcado por grandes mudanças no pensamento científico e matemático.

Esse período foi denominado como a transição entre a Matemática Renascentista e a Matemática Barroca. Cavalieri esteve imerso em um cenário em que novas descobertas científicas, como a invenção do telescópio de Galileu Galilei e a publicação de grandes obras de matemática como Descartes, Pascal e Fermat, influenciaram fortemente o pensamento matemático. Nesse contexto, Cavalieri desenvolveu seu método dos "indivisíveis", uma abordagem pioneira que antecipou o projeto integral e permitiu a medição de áreas e volumes sob condições específicas.

### 3.1.1.2 Questão 02

Quais foram as principais contribuições de Bonaventura Cavalieri para a ciência e, em particular, para a matemática? Como suas descobertas impactaram o campo matemático?

Resposta: As principais contribuições de Cavalieri para a matemática estão vinculadas ao desenvolvimento do método dos "indivisíveis", que foi fundamental para a medição de áreas e volumes. Seu método foi precursor do cálculo integral e localização de bases para o pensamento matemático futuro, permitindo a obtenção de volumes de sólidos e áreas sob curvas. Suas descobertas influenciaram significativamente o campo matemático, uma vez que introduziram métodos geométricos inovadores na medição de grandezas, abrindo caminho para o desenvolvimento do design moderno.

### 3.1.1.3 Questão 03

De que maneira as descobertas de Bonaventura Cavalieri influenciaram ou foram aceitas em sua época? Houve resistência ou limitações gerais de suas teorias?

Resposta: As descobertas de Cavalieri foram inovadoras, mas também encontraram certa resistência em sua época. Sua abordagem, embora revolucionária, foi contestada por alguns matemáticos e filósofos. A falta de formalismo matemático e a ausência de uma teoria de integração na época foram fatores que geraram alguma resistência. No entanto, com o tempo, suas ideias foram progressivamente aceitas e tiveram um papel significativo na evolução da matemática, contribuindo para o desenvolvimento do design e da geometria.

### 3.1.1.4 Questão 04

Foram entregues aos alunos um cilindro e um paralelepípedo. O cilindro possui um raio de 5 cm uma altura de 8 cm, enquanto o paralelepípedo tem bases de 5 cm por 5 cm e altura de 8 cm. Calcule a área da base do cilindro e do paralelepípedo.

Resposta: Cilindro: O cilindro tem um raio de 5 cm e uma altura de 8 cm. A fórmula para calcular a área da base de um cilindro é  $A = \pi \times R^2$ , onde R é o raio. Substituindo os valores na fórmula:

$$A = \pi \times 5^2$$

$$A = 25\pi \text{ cm}^2 \text{ (aproximadamente } 78,54 \text{ cm}^2\text{)}$$

Paralelepípedo: O paralelepípedo tem bases de 5 cm por 8 cm de altura. A área da base de um paralelepípedo é calculada multiplicando o comprimento pela largura. Substituindo os valores:

$$A = 5 \times 5$$

$$A = 25 \text{ cm}^2$$

### 3.1.1.5 Questão 05

Qual foi a conclusão no contexto do princípio de Cavalieri que teve a questão respondida?

Resposta: Na aplicação do Princípio de Cavalieri, a conclusão é baseada na ideia de que mesmo que a área das bases de dois sólidos seja diferente, contanto que a área da seção transversal - ou seja, a seção cortada a uma mesma altura - seja igual, os volumes dos sólidos serão iguais.

No caso dos sólidos (cilindro e paralelepípedo), ao aplicar o Princípio de Cavalieri, mesmo tendo áreas de base diferentes, quando as áreas transversais (cortadas a uma mesma altura) são iguais, a conclusão é que o volume dos dois sólidos também é o mesmo.

Portanto, para a aplicação do Princípio de Cavalieri, a igualdade da área da seção transversal em diferentes sólidos, quando cortados a uma mesma altura, implica a igualdade dos volumes desses sólidos.

### 3.1.1.6 Questão 06

Um prisma triangular com base de área  $20 \text{ cm}^2$  e altura 12 cm é trisseccionado em três pirâmides de mesmo tamanho. Determine o volume de cada pirâmide e a relação entre o volume de uma pirâmide e o volume do prisma original.

Resposta: O volume de uma pirâmide é calculado pela fórmula:  $V = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h$ , onde  $A_{base}$  é a área da base e  $h$  é a altura.

Dado que o prisma foi trisseccionado em três pirâmides do mesmo tamanho, dividimos o volume total do prisma por 3 para obter o volume de cada pirâmide.

O volume do prisma é dado por  $V_{prisma} = A_{base} \times h$ , onde a área da base é  $20 \text{ cm}^2$  e a altura é  $12 \text{ cm}$ .

Calculando:

$$V_{prisma} = 20 \text{ cm}^2 \times 12 \text{ cm} = 240 \text{ cm}^3$$

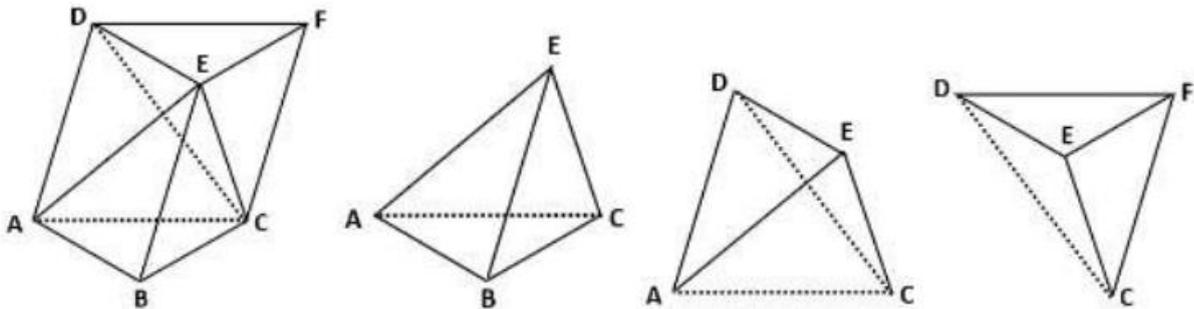
Então, o volume de cada pirâmide, já que foi dividido em três partes iguais, é:

$$\frac{V_{prisma}}{3} = \frac{240 \text{ cm}^3}{3} = 80 \text{ cm}^3.$$

Portanto, a relação entre o volume de uma pirâmide e o volume do prisma original é que o volume de cada pirâmide é um terço do volume do prisma original.

Dessa forma, observe na figura 07 que um prisma ABCDEF pode ser repartido nas pirâmides ABCE, EDAC e CFDE.

Figura 07 - Pirâmides



Fonte: Autora do artigo.

### 3.1.1.7 Questão 07

Quais foram as conclusões que tiveram com o resultado da questão 6?

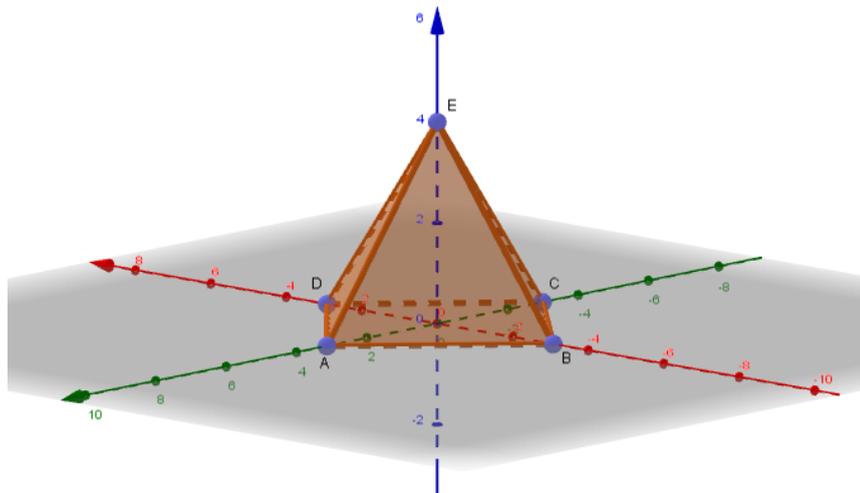
Resposta: A conclusão do resultado é que, ao trissecionar um prisma triangular em três partes iguais, ou seja, em três pirâmides de mesmo tamanho, verifica-se que o volume de cada pirâmide individual é igual a um terço do volume total do prisma original. Isso demonstra que, mesmo dividindo o prisma em partes separadas, a soma dos volumes das pirâmides é igual ao volume total do prisma, mantendo uma proporcionalidade de um terço do volume para cada uma das pirâmides formadas. Isso reflete o princípio de Cavalieri, que mostra formas diferentes com a mesma base e altura possuem volumes iguais, mesmo se a forma específica for diferente.

Cunha (2019) em sua pesquisa envolvendo a utilização de objetos sólidos para o ensino, apresentou em diferentes cenários a aplicação do Princípio de Cavalieri,

principalmente com o uso do GeoGebra utilizando o software GeoGebra como figura 08, onde foram organizados diversos sólidos que compartilhavam a mesma área na base e altura idênticas. Observando esses sólidos, foi notado por Cunha (2019) que seus volumes se igualavam quando suas bases possuíam áreas idênticas e suas alturas eram medidas na mesma extensão.

Dessa forma, ao manipular certas configurações desses sólidos, evidencia-se que a equivalência de volumes apenas se mantinha quando as medidas da base e altura eram exatamente iguais. A precisão de duas casas decimais nesses cálculos validou a clareza dos alunos de que as conclusões realizadas foram em conformidade com essa "regra", o que proporcionou uma sensação de satisfação na compreensão do conceito.

Figura 08 - Pirâmide feita no software GeoGebra



Fonte: Autora do artigo, baseado no trabalho de Cunha (2019).

A figura 08 é um modelo de pirâmide criado no software GeoGebra, onde a mesma pode contribuir para a compreensão do Princípio de Cavalieri, em que, a equivalência entre volumes de três pirâmides, independente do tamanho dela é o que corresponde a teoria.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo apresentou o Princípio de Cavalieri como uma ferramenta de grande relevância para o ensino de volumes no Ensino Médio. A pesquisa revelou o potencial do Princípio de Cavalieri para promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, especialmente quando aplicado de forma tangível, utilizando materiais concretos e ferramentas como o software GeoGebra e a impressão 3D.

As análises e atividades formuladas permitiram evidenciar que, ao apresentar exemplos práticos, contextos históricos e desafios, os estudantes pretendem compreender e aplicar o Princípio de Cavalieri com mais eficiência e entendimento conceitual e histórico mais profundo.

Contudo, observamos que a profundidade de abordagem nos livros didáticos ainda carece de uniformidade e clareza, impactando a qualidade do ensino do Princípio de Cavalieri. Portanto, este estudo não apenas enfatiza a importância de uma abordagem mais tangível no ensino de matemática, mas também ressalta a necessidade de aprimoramento do material didático utilizado. (Cunha, 2019)

Apesar disso, foi observado uma melhoria na qualidade do material didático ao longo dos anos em termos de não aprofundar tanto nos cálculos matemáticos e tendo mais objetividade, além da apresentação de exemplos que fazem parte da vida dos alunos.

Ao concluir, esperamos que este estudo não inspire apenas a adoção de metodologias de ensino mais dinâmicas e práticas no contexto do Princípio de Cavalieri, mas também estimule futuras pesquisas e desenvolvimento de conteúdos mais acessíveis e abrangentes para promover uma educação matemática mais significativa e eficaz para os estudantes do Ensino Médio.

## REFERÊNCIAS

AMAZONAS, Andrea Maria Mano. **O Princípio de Cavalieri e Aplicações com o uso de Material Manipulável**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Bahia - UFBA. Salvador-BA, 2013. Disponível em: <<https://docentes.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/metodologia-do-ensino-de-matematica-ii/materiais-concretos/solidos-de-acrilico/o-principio-de-cavalieri-e-aplicacoes-com-o-uso-de-material-manipulavel/view>>. Acesso em: 20/10/2023.

BONJORNO, José Roberto; José Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: geometria: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias**. 1º Edição – São Paulo-SP: Editora FTD, 2020.

BORDEAUX, Ana Lúcia et. al. **Matemática, segunda série, ensino médio**. Fundação Roberto Marinho, Rio de Janeiro-RJ: 2005.

CUNHA, Luiz Gustavo. **Cálculo de Volumes Usando o Princípio de Cavalieri Mediado por Materiais Concretos**. Dissertação de Mestrado. Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, Joinville-SC, 2019. Disponível em: <<https://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000073/00007323.pdf>>. Acesso em: 01/10/2023.

GARAVELLO, Guilherme Padovani. **Cálculo de Volumes pelo Princípio de Cavalieri**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do ABC, Santo André-SP, 2013. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat\\_tcc.php?id1=775&id2=43826](https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=775&id2=43826)>. Acesso em: 29/09/2023.

IEZZI, Gelson et. al. **Matemática: ciências e aplicações, 2: ensino médio**. 6º edição – Saraiva, São Paulo-SP: 2010.

PASSOS, Arilda Maria; GÓES, Luiz Amilton de. **O Ensino da Matemática na Perspectiva das Metodologias Propostas nas Diretrizes Curriculares do Paraná**. Artigo. Guarapuava, Paraná, 2008. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/716-4.pdf>>. Acesso em: 30/09/2023.

PATERLINI, Roberto Ribeiro. **Os “Teoremas” de Cavalieri**. Artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, n. 72, 2º. quadrimestre de 2010, págs. 43 a 47. UFSCAR. Disponível em: [https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini\\_cavalieri.pdf](https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_cavalieri.pdf). Acessado em: 21/10/2023.

PONTES, Nicomedes Albuquerque. **O Princípio de Cavalieri e suas Aplicações para Cálculo de Volumes**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará – UFC, Fortaleza - CE, 2014. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat\\_tcc.php?id1=1037&id2=1190](https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=1037&id2=1190)>. Acesso em: 01/10/2023.

PRIMO, Márcio Eduardo. **O Princípio de Cavalieri para Cálculo de Volumes no Ensino Médio: Algumas Possibilidades.** Dissertação de Mestrado. Juiz de Fora-MG, 2013. Disponível em:

<<https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/1479/1/marcioeduardoprimo.pdf>>.

Acesso em: 29/09/2023.

TOSE, Marina de Toledo. **Volume: Princípio de Cavalieri no Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2017. Disponível em:

<https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/79f44cdd-11d8-42f9-8662-7a2f472decfa/content>. Acesso em: 01/10/2023.