

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
Câmpus Central - Sede: Anápolis - CET
Curso de Matemática

Geometria Diferencial de Curvas Planas e a Curva de Agnesi

CLAUDIO WELITON GARDINO DA SILVA JUNIOR

Anápolis

2023

CLAUDIO WELITON GARDINO DA SILVA JUNIOR

Geometria Diferencial de Curvas Planas e a Curva de Agnesi

Trabalho de Curso (TC) apresentado, à Coordenação Setorial do Curso de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Graduado no Curso de Matemática da Universidade Estadual de Goiás, sob a orientação do Professor Me. Tiago de Lima Bento Pereira

Orientador: Prof. Me. Tiago de Lima Bento Pereira

Anápolis

2023

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UEG
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

SSI58 Silva Junior, Claudio Weliton Gardino da
6g Geometria Diferencial de Curvas planas e a Curva de
 Agnesi / Claudio Weliton Gardino da Silva Junior;
 orientador Tiago de Lima Bento Pereira. -- Anápolis ,
 2023.
 66 p.

 Graduação - Matemática -- Câmpus Central - Sede:
 Anápolis - CET, Universidade Estadual de Goiás, 2023.

 1. Geometria Diferencial. 2. Bruxa de Agnesi. 3.
 Curva de Agnesi. 4. Curvas Paramtrizadas. 5. Círculo
 Osculador. I. Pereira, Tiago de Lima Bento, orient. II.
 Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS CENTRAL - SEDE: ANÁPOLIS - CET

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO DE TRABALHOS
CONCLUSÃO DE CURSO (TCC) / TRABALHO DE CONCLUSÃO (TC)
NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UEG (RIUEG)

Eu Claudio Weliton Gardino da Silva Junior.

Curso Matemática.

Na qualidade de titular dos direitos de autor que recaem sobre meu Trabalho de Conclusão de Curso / Trabalho de Conclusão, intitulado Geometria Diferencial de Curvas Planas e a Curva de Agnesi

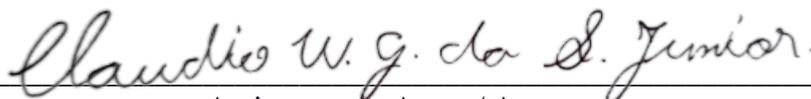
Defendida em 30 / 01 / 2013, junto à banca examinadora do curso com fundamento nas disposições da lei nº 9.610 de 19 de fevereiro de 1998, autorizo a disponibilizar gratuitamente a obra citada, sem ressarcimento de direitos autorais, para fins de impressão e/ou *download* pela *internet*, a título de divulgação da produção científica gerada pela Universidade Estadual de Goiás / Câmpus Central - Sede: Anápolis - CET - Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo, a partir desta data.

() Não autorizo

(X) autorizo texto (completo)

Assim, autorizo a liberação total ou resumo de meu trabalho, estando ciente que o conteúdo disponibilizado é de minha inteira responsabilidade.

Anápolis, 10 de fevereiro de 2023.



Assinatura do Autor / Autora



Assinatura do Orientador / Orientadora

Universidade
Estadual de
Goiás



ESTADO DE GOIÁS
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - UEG
COORDENAÇÃO SETORIAL MATEMÁTICA ANÁPOLIS

CLAUDIO WELITON GARDINO DA SILVA JUNIOR

GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS PLANAS E A CURVA DE AGNESI

Trabalho de Curso II de Matemática apresentado à Banca Examinadora como parte dos requisitos para a obtenção do grau de graduado em Licenciatura em Matemática.

Aprovado. Banca Examinadora do Trabalho de Curso II do curso de Matemática do Campus Central: Sede - Anápolis - CET da Universidade Estadual de Goiás.

Anápolis - Goiás, 30 de janeiro de 2023.

M.e Tiago de Lima Bento Pereira
Orientador(a)/Presidente da banca examinadora

Dr. Leonardo Antonio Souto
1º Membro da Banca Examinadora

Dr. Fabiano Boaventura de Miranda
2º Membro da Banca Examinadora



Documento assinado eletronicamente por **TIAGO DE LIMA BENTO PEREIRA, Docente de Ensino Superior**, em 02/02/2023, às 18:27, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



Documento assinado eletronicamente por **FABIANO BOAVENTURA DE MIRANDA, Docente de Ensino Superior**, em 02/02/2023, às 21:54, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



Documento assinado eletronicamente por **LEONARDO ANTONIO SOUTO, Docente de Ensino Superior**, em 04/02/2023, às 12:09, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



A autenticidade do documento pode ser conferida no site http://sei.go.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=1 informando o código verificador **000037647458** e o código CRC **F5E02EB3**.

COORDENAÇÃO SETORIAL MATEMÁTICA ANÁPOLIS
RODOVIA BR 153 S/Nº - Bairro ZONA RURAL - CEP 75132-903 - ANAPOLIS - GO
0- QUADRA ÁREA KM 99 (62)3328-1139



Referência: Processo nº 202300020000867



SEI 000037647458

*Este trabalho é dedicado à todos aqueles que,
de alguma forma, mesmo sem consciência de tal feito,
possibilitaram a minha caminhada até aqui.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradecer a Deus por ter me capacitado e me dado forças para chegar até aqui.

Agradeço também a minha família, que tem me ajudado em tempos difíceis. Aos meus professores, principalmente minha hoje finada professora de matemática do ensino médio professora Juliana Flávia, por ter incentivado a minha entrada e permanência no curso.

Aos professores do curso de matemática, em especial meu orientador professor Me.Tiago de Lima Bento Pereira, por ter aceitado ser meu orientador e assim contribuído significativamente com a minha formação, e aos membros da banca avaliadora professores, Dr. Fabiano Boaventura de Miranda e Dr. Leonardo Antônio Souto.

E alguns poucos amigos que fiz em minha vida, que me apoiaram ou me ajudaram de forma positiva ou negativa a não desistir.

"Vi Veri Veniversum Vivus Vici"

Pelo poder da verdade eu enquanto vivo
conquistei o universo.

(V de Vingança)

RESUMO

A Geometria Diferencial é uma das áreas de estudo de extrema importância em matemática. Na busca do objeto geométrico para desenvolvimento do trabalho destaca-se a Curva de Agnesi, também chamada de "Bruxa de Agnesi". O objetivo principal é realizar um estudo da Curva de Agnesi utilizando conceitos de cálculo diferencial e integral. Utilizando-se da pesquisa bibliográfica de cunho qualitativo apresenta-se dados históricos a respeito do surgimento da Geometria Diferencial e em seguida uma breve história da matemática italiana Maria Gaetana Agnesi e a Curva de Agnesi. Faz-se a dedução das equações cartesianas e paramétricas da Curva de Agnesi. Apresenta-se as definições de curvas parametrizadas diferenciáveis, vetores tangente e normal, curvatura, círculo osculador e evoluta, fazendo aplicação destes conceitos na Curva de Agnesi estruturando assim o estudo diferencial da Curva de Agnesi. Por último realiza-se uma análise dos comportamentos destes, com auxílio do *software* GeoGebra para visualização gráfica.

Palavras-chave: Bruxa de Agnesi; Curvas parametrizadas; Círculo osculador; Curva de Agnesi; Geometria Diferencial.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Maria Gaetana Agnesi (Coleção David Smith)	25
Figura 2.1 – Construção da Curva de Agnesi	28
Figura 2.2 – Construção da Equação Cartesiana	28
Figura 2.3 – Curva de Agnesi	30
Figura 2.4 – Construção da Equação Paramétrica	31
Figura 3.1 – Parábola, $\alpha(t) = (t, t^2 - 1)$	35
Figura 3.2 – Vetor tangente unitário, $T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$	36
Figura 3.3 – Vetor Normal unitário, $N(t) = \left(-\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$	37
Figura 3.4 – Centro de Curvatura e Círculo Osculador de uma curva α	39
Figura 3.5 – Evoluta(ζ) de uma curva α	39
Figura 4.1 – Curva de Agnesi, forma paramétrica	41
Figura 4.2 – Vetor tangente unitário da curva de Agnesi	42
Figura 4.3 – Vetor normal unitário da curva de Agnesi	43
Figura 4.4 – Representação geométrica da curvatura da curva de Agnesi	44
Figura 4.5 – Círculo osculador da curva de Agnesi	45
Figura 4.6 – Evoluta da curva de Agnesi	46
Figura A.1 – Controle deslizante t	57
Figura A.2 – Criando a Circunferência	57
Figura A.3 – Circunferência	58
Figura A.4 – Ponto sobre a Circunferência	58
Figura A.5 – Criando o ponto que se move sobre a Circunferência	58
Figura A.6 – Comando Interseção de Objetos	59
Figura A.7 – Comando para criar retas	59
Figura A.8 – Comando para criar o ponto D	59
Figura A.9 – Comando reta paralela	60
Figura A.10 – Comando reta perpendicular	60
Figura A.11 – Comando para criar o ponto P	60
Figura A.12 – Lugar Geométrico do ponto P , chamado Curva de Agnesi	61
Figura A.13 – Comando para lugar geométrico	61

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	19
1	DOS PRIMÓRDIOS À BRUXA DE AGNESI	21
1.1	Breve Contexto Histórico da Geometria	21
1.2	Maria Gaetana Agnesi	24
2	CONSTRUÇÃO E EQUAÇÕES DA CURVA DE AGNESI	27
2.1	Construção da Curva de Agnesi	27
2.2	Equação Cartesiana	28
2.3	Equações Paramétricas	30
2.3.1	1ª Equação Paramétrica	30
2.3.2	2ª Equação Paramétrica	30
3	CONCEITOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL	33
3.1	Curvas parametrizadas diferenciáveis	35
3.2	Referencial de Frenet	35
3.2.1	Vetor Tangente	35
3.2.2	Vetor Normal	36
3.3	Curvatura	38
3.4	Círculo osculador e Evoluta	38
4	ESTUDO DIFERENCIAL DA CURVA DE AGNESI	41
4.1	Vetores tangente e normal	41
4.2	Curvatura	43
4.3	Circulo osculador	45
4.3.1	Evoluta	46
	CONSIDERAÇÕES FINAIS - CONCLUSÕES	47
	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICE A – VETOR NORMAL UNITÁRIO PELA DEFINIÇÃO .	51

ANEXOS	55
ANEXO A – CONSTRUÇÃO DA CURVA DE AGNESI, UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	57

INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial é tida como a terceira fase da construção histórica da geometria, sendo esta o estudo da geometria com as técnicas do cálculo diferencial e integral. Trazendo conceitos sobre curvas planas e se estendendo à superfícies, tendo grande importância em estudos matemáticos. Na busca do objeto geométrico para o desenvolvimento deste trabalho desta-se a Curva de Agnesi também conhecida como "Bruxa de Agnesi".

Buscando aprimoramento intelectual e com a curiosidade sobre o estudo e comportamento da Curva de Agnesi em relação aos conceitos referentes a curvas planas da Geometria Diferencial como: vetores tangente e normal, curvatura, círculo osculador e evoluta de uma curva plana. O presente trabalho utilizando-se das técnicas da pesquisa bibliográfica de cunho qualitativo; com o objetivo de realizar o estudo diferencial da Curva de Agnesi com os conceitos da Geometria Diferencial, investigando a origem da Geometria Diferencial e seu idealizadores; a origem da Curva de Agnesi, bem como sua construção e equações cartesianas e paramétrica, deduzindo-as a partir de sua construção; investigando ainda os conceitos de curva parametrizada diferenciável, curva regular, vetores tangente e normal, curvatura, círculo osculador e evoluta, da Geometria diferencial, aplicando tais conceitos à Curva de Agnesi.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos, um apêndice e um anexo além das considerações finais e referências bibliográficas, dos quais: No Capítulo 1, apresenta-se um breve contexto histórico da geometria até chegar ao conhecido hoje como Geometria Diferencial, que é o estudo da geometria através dos métodos do cálculo diferencial e integral. Tendo por referência autores como Boyer (2012), Gorodski (2002), Eves (2011) e Delbem (2010), que trazem nomes de alguns matemáticos que tiveram grande influência no desenvolvimento da Geometria, em especial a importância de Euclides, Fermat, Descartes, Bolyai, Lobachevsky, Klein, Gauss e Riemann, além de Leibniz e Newton com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, dentre outros nomes importantes. Apresenta-se ainda uma breve história da matemática italiana Maria Gaetana Agnesi.

No Capítulo 2 apresenta-se a origem da Curva de Agnesi a qual, devido a um erro de tradução, ganhou o nome de "Bruxa de Agnesi" ou "Feiticeira de Agnesi". Apresenta-se também a construção da curva de Agnesi e as deduções das equações respectivamente cartesianas e paramétricas da curva de Agnesi. Utilizando-se das relações de triângulos do teorema de Pitágoras e manipulações algébricas. No Capítulo 3 apresenta-se breves noções de geometria analítica que podem ser encontrados em Reis e Silva (1984) e cálculo diferencial que pode-se encontrar tanto em Tenenblat (2008), quanto em Stewart (2016), a fim de introduzir os conceitos acerca da Geometria Diferencial de curvas planas, como definições de curvas parametrizadas diferenciáveis e curvas parametrizadas regulares, vetores tangente e normal, referencial de Frenet, curvatura,

círculo osculador e evoluta, de curvas planas.

No Capítulo 4 são aplicados os conceitos apresentados no Capítulo 3 à curva de Agnesi. Realizando, assim, o estudo diferencial da curva de Agnesi apresentando a equação paramétrica, os vetores tangente e normal unitários, a curvatura, os círculos osculadores e a evoluta.

O trabalho conta com o auxílio do *software* Geogebra para visualização da construção gráfica e dos demais conceitos apresentados a respeito da curva de Agnesi e da teoria envolvida.

1 DOS PRIMÓRDIOS À BRUXA DE AGNESI

A medida com que o tempo passa a história vem sendo criada e com isso várias mudanças ocorrem, um desses casos é a matemática e suas áreas, tomando como exemplo a geometria, podemos dividi-la em três fases: a geometria antiga, usada por babilônios, egípcios de forma prática e estudada pelos gregos que a transformaram em uma ciência axiomática dedutiva; a geometria analítica, que é resultado da união da geometria grega com a álgebra desenvolvida pelos hindus e árabes; e a Geometria Diferencial que resulta da união da geometria analítica com as técnicas do cálculo diferencial e integral (DELBEM, 2010).

1.1 Breve Contexto Histórico da Geometria

Segundo Gorodski (2002), embora Heródoto tenha escrito que a geometria nasceu no Egito antigo, os registros mais antigos a respeito da geometria são da época dos babilônios cerca de cinco mil anos atrás, motivados possivelmente por questões práticas. Mas o estudo da geometria em si é desenvolvida pelos gregos e embora Tales de Mileto (cerca de 600 anos antes da era comum) seja considerado o “Pai da Geometria” o teorema que leva seu nome já era de conhecimento dos Sumérios (ou babilônios) por volta de dois mil anos antes.

Tales e a escola pitagórica fizeram importantes contribuições acerca do método dedutivo em matemática, que posteriormente foram consumados devido o surgimento de “Os Elementos” (*Στοιχεια*) por volta de 300 a.C. escrito por Euclides que segundo Boyer (2012) foi professor do museu de Alexandria a convite de Ptolomeu I que foi general do exército de Alexandre o grande. Embora não se saiba onde Euclides nasceu e nem se saiba de sua vida, a importância de Os Elementos é inquestionável, considerada uma das mais influentes obras da história; dividido em treze volumes Os Elementos apresenta um conjunto de definições e axiomas (ou postulados) e então proposições e teoremas são provados a partir das definições e axiomas, através de deduções lógicas. Os primeiros seis livros tratam-se de geometria plana, os livros de 7 a 9 tratam de teoria dos números, o décimo sobre os incomensuráveis e do livro 11 ao 13 tratam de geometria espacial por uma visão planificada. Segundo Boyer (2012) o primeiro livro começa com uma lista de 23 definições e que se colocadas na formalidade atual algumas não são definidas, pois ponto, reta e plano são entes primitivos; em seguida o livro 1 apresenta os famosos 5 postulados e 5 noções comuns.

- I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
- II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
- III. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

IV. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongados as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores de que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Os Elementos foram copiados, recopiados e segundo Boyer (2012) com erros e variações, mas diversas cópias de Os Elementos chegaram aos dias atuais, e talvez nenhum livro além da Bíblia possa se gabar de ter várias edições e nenhum em matemática teve influência equiparada ao livro de Euclides. Entretanto, o postulado 5 (ou postulado das paralelas), tinha um tom de teorema e como diz Gorodski (2002) vários matemáticos tentaram deduzi-lo dos demais axiomas e portanto prová-lo com um teorema, mas isso só ocorreu cerca de dezoito séculos mais tarde.

Surgindo então a geometria analítica ou geometria em coordenadas desenvolvida de forma independente pelos franceses Pierre de Fermat ¹ e René Descartes ². Descartes, segundo Boyer (2012), aplicou seu método de trabalhar geometria e escreveu “*la Géométrie*”, que levou a geometria analítica ao conhecimento de seus contemporâneos, e foi apresentada como um dos apêndices do “*Discours de la méthode*”. Rival de Descartes em capacidade matemática, como afirma Boyer (1996), Fermat apesar de não ser matemático e sim formado em direito, parece ter tido tempo para se dedicar a matemática e outras ciências, além de literatura clássica; resultado disso em 1629 Fermat fez descobertas importantes em matemática, o uso de coordenadas não veio da prática nem das representações medievais de funções e sim veio da aplicação da álgebra a problemas geométricos da antiguidade, no entanto, Fermat não publicava quase nada em toda sua vida, mas sua geometria analítica era a mais próxima da atual.

Anos após Fermat e Descartes, matemáticos continuaram tentando deduzir o 5^a postulado de Euclides através dos quatro outros postulados, dentre estes matemáticos esta o húngaro Janos Bolyai ³, o russo Nicolai Ivonovich Lobachevsky ⁴, o alemão Felix Christian Klein ⁵ e o italiano Georg Friedrich Bernhard Riemann ⁶, como afirma Santos (2020), e também o matemático Johann Carl Friedrich Gauss ⁷ que manteve suas descobertas para si próprio como afirma Boyer (2012), dado que Gauss não publicou nada a respeito e a tentativa de deduzir o 5^a postulado continuou. Lobachevsky em 1829 publicou “Sobre o Princípio da Geometria” onde deduziu uma estrutura harmônica sem contradições lógicas e segundo Gorodski (2002) a geometria de Lobachevsky não foi bem recebida; Janos Bolyai também chegou à mesma descoberta que Lobachevsky e publicou “Ciência Absoluta do Espaço” como apêndice do livro

¹ ★ 1607 - † 1665

² ★ 1596 - † 1650

³ ★ 1802 - † 1860

⁴ ★ 1793 - † 1856

⁵ ★ 1849 - † 1925

⁶ ★ 1826 - † 1866

⁷ ★ 1777 - † 1855

de seu pai, Farkas Bolyai ⁸, que era amigo de Gauss. Já a reação de Gauss tanto a Janos Bolyai quanto a Lobachevsky foi idêntica, com aprovação sincera, porém sem apoio impresso, pois os resultados já não eram novidade para Gauss. E em 1871 Klein nomeia a geometria de Janos e Lobachevsky como geometria hiperbólica, além das demais geometrias que, segundo Santos (2020), chamou de geometria parabólica e geometria elíptica.

A Geometria Diferencial começa com curvas e noções sobre retas tangentes que já eram encontradas desde Euclides. O alemão Gottfried Leibniz ⁹ e o inglês Isaac Newton ¹⁰, desenvolvem o cálculo diferencial que, segundo Gorodski (2002), permite o estudo de curvas e superfícies através das propriedades diferenciais. A curvatura de uma curva plana em um ponto da mesma é a medida numérica de quando a curva se afasta de ser reta numa vizinhança do ponto ou seja é taxa de variação naquele ponto, na direção tangente à curva relativo ao comprimento do arco, além de que o conceito de curvatura e círculo osculador já era de conhecimento de Newton e Leibniz, entretanto o precursor do assunto tenha sido Christian Huygens ¹¹ que não conhecia o cálculo, mas publicou em 1673 um trabalho sobre curvas planas, dando introdução aos conceitos de evoluta e involuta de uma curva.

Durante os séculos XVIII e XIX, desenvolve-se a teoria de curvas e superfícies em um espaço de três dimensões. Segundo Gorodski (2002) Leonhard Euler ¹² dominou a matemática por maior parte do século XVIII, talvez sua maior contribuição à Geometria Diferencial tenha sido o estudo da curvatura de seções de uma superfície, embora seja curioso que nem ele nem seus contemporâneos estudaram superfícies representadas pelas coordenadas x, y, z em termos de funções de duas variáveis, porém para dar esse passo foi necessário Gauss e outros como, Charles Lupin ¹³ e Augustin Louis Cauchy ¹⁴ em "*Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie*" publicado em 1826, nesta publicação é introduzido métodos sistematizando cálculos feitos por seus predecessores, refinando trabalhos sobre curvatura e torção, culminado nas fórmulas de Frenet-Serret¹⁵, além disso o trabalho de Cauchy finaliza o período da Geometria Diferencial, apesar de suas técnicas serem belas, elas tiveram que dar espaço para o que viria a seguir.

Gauss com seus trabalhos em teoria das superfícies por volta de 1816 fez um levantamento geodésico¹⁶, como afirma Delbem (2010), o trabalho tinha como objetivo medir a distância entre cidades e pontos de referência. Anteriormente Euler tinha visto que as coorde-

⁸ ★ 1775 - † 1856

⁹ ★ 1646 - † 1716

¹⁰ ★ 1643 - † 1727

¹¹ ★ 1629 - † 1695

¹² ★ 1707 - † 1783

¹³ ★ 1784 - † 1873

¹⁴ ★ 1789 - † 1857

¹⁵ As fórmulas de Frenet-Serret, são equações em função do vetor tangente e normal de curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, como se pode ver em Tenenblat (2008, p.43)

¹⁶ "Curvas Geodésicas são curvas na superfície com a propriedade que qualquer segmento suficientemente pequeno é o caminho mais curto entre os seus extremos"(GORODSKI, 2002).

nadas (x, y, z) podiam ser escritas como funções de duas variáveis sendo elas u e v , no entanto, quem utilizou essa representação foi Gauss, fazendo (x, y, z) funções de u e v ditas "Coordenadas curvilíneas", Gauss ainda introduziu a primeira¹⁷ e segunda¹⁸ formas fundamentais e inspirado em seus trabalhos sobre astronomia, ele introduziu ainda, segundo Gorodski (2002) a noção de "representação esférica" de uma superfície, denominada hoje de aplicação de Gauss. Segundo Delbem (2010), os trabalhos de Gauss tiveram alguns seguidores, os quais destacam-se Pierre Bonnet¹⁹, Carl Jacobi²⁰, Ferdinand Mindig²¹, Gaspare Mainardi²² e Delfino Codazzi²³.

A geometria não euclidiana por vários anos ficou à margem dos aspectos da matemática até que foi finalmente integrada pela ideias de Riemann que era filho de pastor. Riemann foi educado em condições modestas no entanto, teve boa instrução, sendo primeiro em Berlim e depois em Göttingem, onde conseguiu seu doutorado com uma tese que falava sobre funções de variáveis complexas e que nessa tese estão hoje as chamadas equações de Cauchy-Riemann²⁴. Tal tese trazia também o conceito de superfície de Riemann (BOYER, 2012).

Em uma conferência para os docentes da faculdade de filosofia de Göttingem, a fim de receber um cargo, Riemann deu aos avaliadores três possíveis assuntos a serem apresentados, Gauss como chefe do departamento, escolheu o assunto para o qual Riemann não estava bem preparado e tinha pouco conhecimento, porém em semanas Riemann preparou sua apresentação *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* ("Sobre as hipóteses em que a Geometria se baseia"), publicado postumamente, tema preferido de Gauss. Riemann ainda introduziu nessa apresentação o conceito $n - dimensional$ de pontos $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$, generalizando a ideia de superfície, em seguida introduz o que hoje é chamado de métrica Riemanniana, que generaliza a então primeira forma fundamental. O trabalho de Riemann unificou as Geometrias Euclidiana e não Euclidiana, além de generalizá-las (DELBEM, 2010).

1.2 Maria Gaetana Agnesi

Maria Gaetana Agnesi Figura 1.1, nasceu em Milão no ano de 1718, primogênita de 21 filhos que seu pai teve ao longo de três casamentos. Agnesi se desenvolveu em muitas áreas do conhecimento além da matemática a qual se destacava. Ainda criança Agnesi dominava o latim, grego, hebraico, francês, espanhol, alemão entre outras línguas. Aos nove anos de idade Agnesi teve um discurso publicado em latim em que defendia o ensino superior para mulheres. Seu pai

¹⁷ "A primeira forma fundamental é relacionada ao comprimento de curvas em uma superfície, ângulo entre os vetores tangentes e área de regiões da superfície", ver (TENENBLAT, 2008, p.138).

¹⁸ "A segunda forma fundamental é relacionada com a curvatura das curvas de uma superfície", ver (TENENBLAT, 2008, p.138).

¹⁹ ★ 1819 - † 1892

²⁰ ★ 1804 - † 1851

²¹ ★ 1806 - † 1885

²² ★ 1800 - † 1879

²³ ★ 1824 - † 1873

²⁴ " $u_x = v_y, u_y = -v_x$, que uma função analítica $w = f(z) = u + iv$, de variável complexa que $z = x + iy$ deve satisfazer" (BOYER, 2012, p.366).

era professor de matemática na Universidade de Bolonha e com prazer reunia alguns intelectuais para ver Agnesi conversar com doutores sobre os assuntos que queriam em suas línguas maternas. Aos vinte anos de idade Agnesi publicou "*Propositiones Philosophicae*" que continha cerca de 190 ensaios em que se tratavam de matemática, noções de lógica, hidromecânica, mecânica, mecânica celeste, gravitação e também química, botânica, zoologia entre outros; estes ensaios resultaram em diversas discussões na casa de seu pai (EVES, 2011).

Em 1748 aos trinta anos Agnesi publicou "*Instituzioni Analitiche*" em dois volumes, este trabalho constitui-se de um curso de matemática estruturado especificamente para jovens, em que o primeiro volume se trata de aritmética, álgebra, trigonometria, geometria analítica e cálculo; o segundo volume se tratava de equações diferenciais e séries infinitas, escrevendo ambos os volumes em italiano, evitando assim o latim para que seu trabalho pudesse ser lido por jovens. Em 1749 Agnesi foi nomeada membro honorário da Universidade de Bolonha pelo papa Benedito XIV, no entanto, nunca lecionou na instituição (EVES, 2011).

Figura 1.1 – Maria Gaetana Agnesi (Coleção David Smith)



Fonte:(EVES, 2011)

Angustiada com a notoriedade, Agnesi se entregou a uma vida reclusa em 1752. Após a morte de seu pai, Agnesi dedicou o restante de sua vida a obras de caridade e o estudo religioso,

em 1771 se tornou diretora de uma instituição benevolente em Milão, onde permaneceu até sua morte em 1799 aos oitenta e um anos de idade (EVES, 2011).

2 CONSTRUÇÃO E EQUAÇÕES DA CURVA DE AGNESI

Neste capítulo apresenta-se a construção¹ e as deduções das equações cartesianas e paramétrica, respectivamente, da curva de Agnesi.

Embora Fermat não tenha dado nome a curva hoje conhecida como “bruxa” ou “feiticeira” certa vez se interessou pela mesma, mas foi em estudos de Guido Grandi² que ganhou nome de “*versoria*” que significa “corda de manobrar vela de embarcação” porém não se sabe o motivo do nome. Quando Agnesi escreveu “*Instituzioni Analitiche*”, segundo Eves (2011) ela confundiu a palavra *versoria* de Grandi com “*versiera*” a qual posteriormente foi traduzido por John Colson para o inglês, ele converteu *versiera* para “*witch*”(feiticeira) e assim a curva passou a ser conhecida como “*witch of Agnesi*” (Feiticeira de Agnesi) entretanto, o nome mais comum é “curva de Agnesi”. No entanto, outros autores dizem que a confusão com a tradução veio por John Colson que teria confundido *versoria* com *versiera* e traduzido erroneamente para o inglês como já dito.

Além disso a curva pode ser construída da seguinte maneira:

Considere uma circunferência de raio a e diâmetro OK sobre o eixo y , onde O é a origem do sistema de coordenadas. Seja OA uma secante variável por O , sendo A sua intersecção com a tangente a circunferência por K se Q é a segunda intersecção de OA com a circunferência, então a curva de Agnesi é o lugar dos pontos P de intersecção das retas QP e AP , respectivamente paralelas e perpendiculares, ao eixo x (EVES, 2011, p. 504).

ou como pode ser visto a seguir.

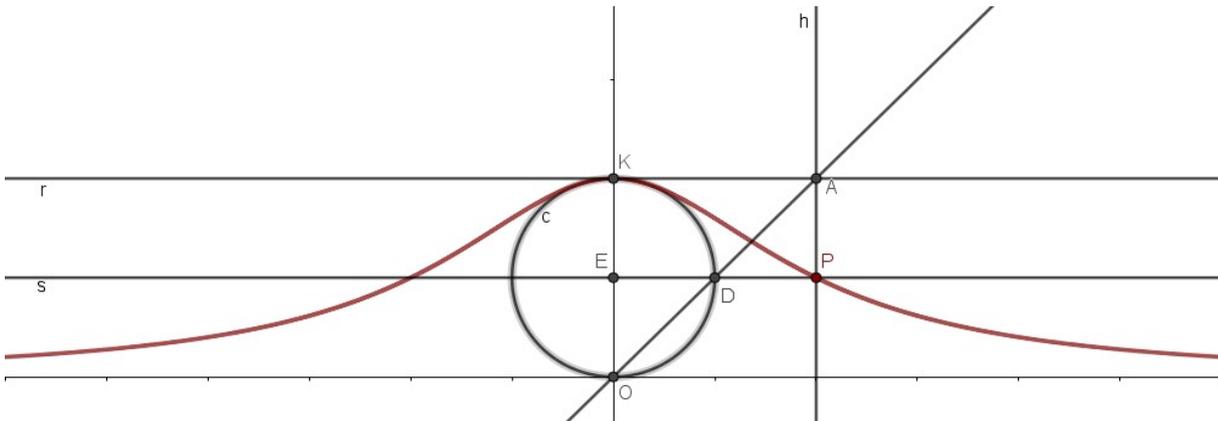
2.1 Construção da Curva de Agnesi

Considere: (1) o ponto O a origem do plano cartesiano e “ c ” uma circunferência de diâmetro $\overline{OK} = a$, tal que \overline{OK} está sobre o eixo das ordenadas, conforme exposto na Figura 2.1; (2) A reta OA secante a C por O , sendo A sua intersecção com a reta tangente r à circunferência por K . A segunda intersecção de OA com C é D por onde passa uma reta s paralela a r ; (3) a reta h perpendicular a reta r passando pelo ponto A ; (4) o ponto $P(x, y)$ intersecção da reta h com a reta s . A curva de Agnesi é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ a medida que se varia D sobre a circunferência.

¹ Ver Anexo A, para construção com auxílio do *software* GeoGebra

² ★ 1672 - † 1742

Figura 2.1 – Construção da Curva de Agnesi



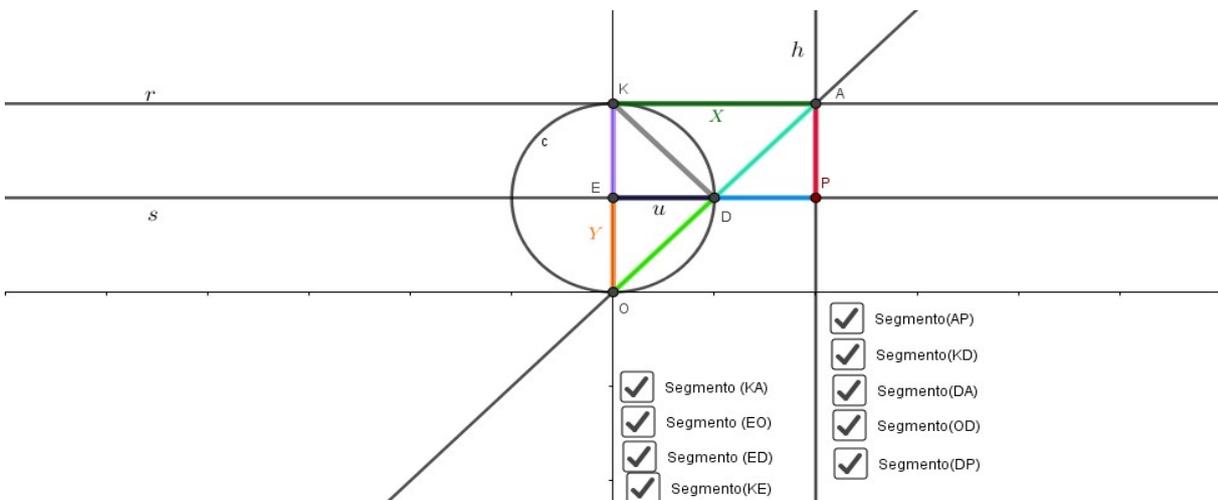
Fonte: Próprio autor. (2023)

2.2 Equação Cartesiana

Nesta seção é feita a dedução da equação cartesiana da Curva de Agnesi, utilizando como referência a Figura 2.1, relações de triângulos e o teorema de Pitágoras, como se segue.

Considere o ponto E pertencente ao segmento OK e defina $ED = u$. Note que $KA = x$ e $EO = y \neq 0$, onde x e y são as coordenadas do ponto $P(x, y)$, como pode-se observar na Figura 2.2. Assim por semelhança de triângulos tem-se que o triângulo KDO é retângulo, pois "Se um triângulo inscrito numa semicircunferência tem um lado igual ao diâmetro, então ele é triângulo retângulo (DOLCE; POMPEU, 2013, p.166)."

Figura 2.2 – Construção da Equação Cartesiana



Fonte: Próprio autor. (2023)

Considerando os triângulos $\triangle KED$, $\triangle EDO$ e o Teorema de Pitágoras tem-se:

(1°) $\triangle KED$:

$$\overline{KD}^2 = \overline{KE}^2 + \overline{ED}^2 = (a-y)^2 + u^2 \quad (2.1)$$

(2°) $\triangle EDO$:

$$\overline{DO}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{EO}^2 = u^2 + y^2 \quad (2.2)$$

Utilizando o triângulo $\triangle KDO$ e as Equações 2.1 e 2.2:

$$\begin{aligned} \overline{OK}^2 &= \overline{KD}^2 + \overline{DO}^2 \\ a^2 &= [(a-y)^2 + u^2] + [u^2 + y^2] \\ a^2 &= a^2 - 2ay + y^2 + u^2 + u^2 + y^2 \\ a^2 &= a^2 - 2ay + 2y^2 + 2u^2 \\ -2ay + 2y^2 + 2u^2 &= 0 \\ -ay + y^2 + u^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para determinar o valor de u observe na Figura 2.2 que os triângulos $\triangle KAO$ e $\triangle ADP$ são semelhantes, assim:

$$\frac{KA}{DP} = \frac{OK}{AP} \Rightarrow \frac{x}{x-u} = \frac{a}{a-y}. \quad (2.4)$$

Manipulando esta equação obtém-se o valor de u :

$$\begin{aligned} (x-u)a &= x(a-y) \\ x-u &= \frac{x(a-y)}{a} \\ u &= -\frac{x(a-y)}{a} + x \\ u &= \frac{xa - xa + xy}{a} \\ u &= \frac{xy}{a} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Logo substituindo Equação 2.5 em Equação 2.3:

$$\begin{aligned} \left(\frac{xy}{a}\right)^2 + y^2 - ay &= 0 \\ \frac{x^2y^2}{a^2} + y^2 - ay &= 0 \\ x^2y^2 + a^2y^2 - a^3y &= 0 \\ y[(x^2 + a^2)y - a^3] &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $y = 0$ ou $(x^2 + a^2)y - a^3 = 0$. Como $y = 0$ não pode ser adotado pelas hipóteses, tem-se que a equação cartesiana da curva de Agnesi é

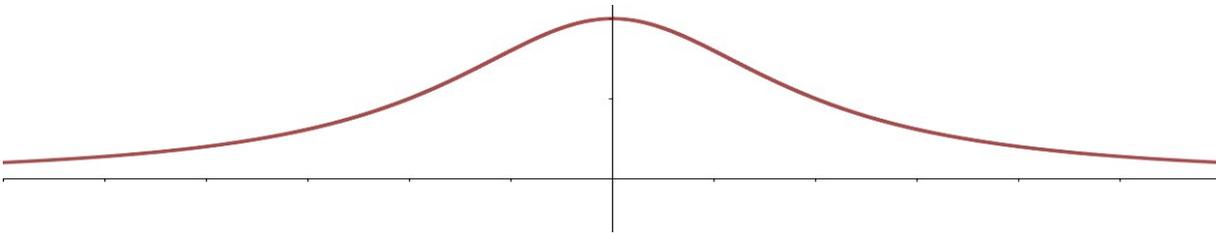
$$(x^2 + a^2)y - a^3 = 0, \quad (2.6)$$

ou ainda,

$$y = \frac{a^3}{(x^2 + a^2)}. \quad (2.7)$$

A Figura 2.3 exibe a curva de Agnesi, $y = \frac{a^3}{(x^2 + a^2)}$. No link <<https://www.geogebra.org/m/ecwrjxnc>>, movimentando-se o valor do controle deslizante α , pode-se ver a movimentação do ponto $P(X, Y)$ ao longo da curva.

Figura 2.3 – Curva de Agnesi



Fonte: Próprio autor. (2023)

2.3 Equações Paramétricas

Nesta seção se deduz duas equações paramétricas, cujo traço é a curva de Agnesi. A primeira será utilizada posteriormente no estudo da curva de Agnesi, e a segunda equação paramétrica é deduzida utilizando o parâmetro como sendo o ângulo do triângulo $\triangle KOA$.

2.3.1 1ª Equação Paramétrica

Conhecida a equação cartesiana da curva de Agnesi, tem-se que uma forma direta para deduzir uma equação paramétrica é considerar o parâmetro t como sendo a própria variável x . Desta forma, considerando a equação cartesiana, exposta na Equação 2.7, $x(t) = t$ e $y(t) = \frac{a^3}{(t^2 + a^2)}$.

Para aplicação no decorrer do trabalho utiliza-se a seguinte parametrização da curva de Agnesi:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = \left(t, \frac{a^3}{t^2 + a^2} \right), \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

2.3.2 2ª Equação Paramétrica

Para deduzir outra forma paramétrica observe a Figura 2.4, construída como na Figura 2.2, mas agora apresentando o parâmetro t como ângulo \hat{O} do triângulo $\triangle KOA$.

3 CONCEITOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Neste capítulo enuncia-se conceitos a respeito da Geometria Diferencial de curvas planas com o objetivo de estudar a curva de Agnesi. Utilizando como referência Stewart (2016), Tenenblat (2008) e Carmo (2005), apresenta-se os conceitos e alguns resultados acerca de curvas parametrizadas diferenciáveis, como referencial de Frenet (vetores tangente e normal), curvatura, círculo osculador e evoluta. Para isso, relembremos de alguns conceitos.

Noções de Geometria Analítica no Plano

De forma generalizada considere que $\mathbb{R}^n = u = (x^1, \dots, x^n)$, com $x^n \in \mathbb{R}$, é o espaço vetorial real onde $u = \sum_{i=1}^n x^i e_i$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ é a i -ésima coordenada. Defini-se produto interno de $u = (x^1, \dots, x^n)$ e $v = (x^1, \dots, x^n)$ por:

$$\langle u, v \rangle = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n.$$

Considerando os vetores em \mathbb{R}^2 tem-se que: seja $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ o número $u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2$ é dito produto interno de u e v ou escalar dos vetores u e v .

Dado um vetor $x = (x, y)$ o módulo é dado por, $\sqrt{x^2 + y^2}$ ou seja:

$$v = (x, y) \Rightarrow \|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Para se obter um vetor unitário basta que $v \neq 0$ e multiplicar pelo inverso de seu módulo, isto é:

$$v \cdot \frac{1}{\|v\|} = \frac{v}{\|v\|}.$$

como pode ser visto com maiores detalhes em Reis e Silva (1984).

Noções de Cálculo Diferencial no Plano

Uma função vetorial $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, é uma aplicação que para cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, onde as funções $x(t), y(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ são ditas funções coordenadas de α . Se f é função real e α e β são funções vetoriais definidas em I , então $\alpha + \beta$, $f \cdot \alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, são definidas da forma usual, isto é, $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(t) &= \alpha(t) + \beta(t) \\ (f \cdot \alpha)(t) &= f(t) \cdot \alpha(t) \\ \langle \alpha, \beta \rangle(t) &= \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle. \end{aligned}$$

Para maiores detalhes ver Tenenblat (2008, p. 13). A derivada α' de uma função vetorial α é definida da mesma forma que para funções a valores reais:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = \frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t).$$

se o limite existir.

Teorema 3.1. Se $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = x(t)i + y(t)j$, onde x, y são diferenciáveis, então

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t)i + y'(t)j.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t))]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ &= (x'(t), y'(t)). \end{aligned}$$

□

Como pode-se ver em Stewart (2016, p.770).

De forma equivalente às funções reais, tem-se as regras de derivação para funções vetoriais como mostra o teorema a seguir:

Teorema 3.2. ¹ Suponha α e β funções vetoriais diferenciáveis e k um escalar e f uma função real.

$$1 \quad \frac{d}{dt}(\alpha(t) + \beta(t)) = \alpha'(t) + \beta'(t)$$

$$2 \quad \frac{d}{dt}(k \cdot \alpha(t)) = k \cdot \alpha'(t)$$

$$3 \quad \frac{d}{dt}(f(t) \cdot \alpha(t)) = f'(t) \cdot \alpha(t) + f(t) \cdot \alpha'(t), \text{ (Regra do produto)}$$

$$4 \quad \frac{d}{dt}\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t)$$

$$5 \quad \frac{d}{dt}(\alpha(f(t))) = f'(t) \cdot \alpha'(f(t)), \text{ (Regra da cadeia)}$$

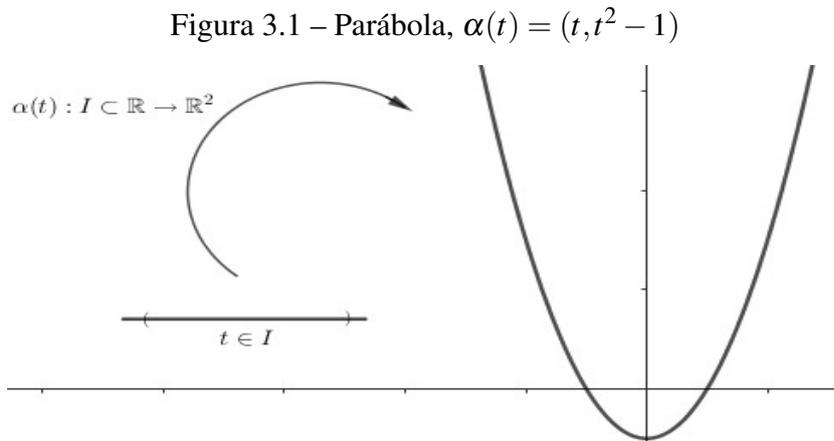
$$6 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \right) = \frac{\alpha'(t) \cdot \beta(t) - \alpha(t) \cdot \beta'(t)}{(\beta(t))^2}, \text{ (Regra do quociente)}$$

¹ (STEWART, 2016, p.771)

3.1 Curvas parametrizadas diferenciáveis

Definição 3.1.² Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação diferenciável α suave³, de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva, e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I$, é chamado traço da curva.

Exemplo 3.1. Seja $\alpha(t) = (t, t^2 - 1)$, tal que $t \in I \subset \mathbb{R}$. como pode se observar na Figura 3.1, para cada valor de t no intervalo aberto I a aplicação $\alpha(t)$ descreve o traço de uma curva parametrizada diferenciável.



Fonte: Próprio autor. (2023)

Observação 1. Para uma curva dada por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (t, f(t))$ onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, o traço de α é igual à representação gráfica de f .

Definição 3.2.⁴ Uma curva parametrizada diferenciável, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, é dita regular quando $\forall t \in I, \alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq 0$.

3.2 Referencial de Frenet

3.2.1 Vetor Tangente

Definição 3.3.⁵ Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável, que para cada $t \in I$, associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é dito vetor tangente a α em t .

Dada $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I$, uma curva regular, defini-se o vetor tangente unitário $T(t)$ por:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right). \quad (3.1)$$

² Tenenblat (2008, p.28).

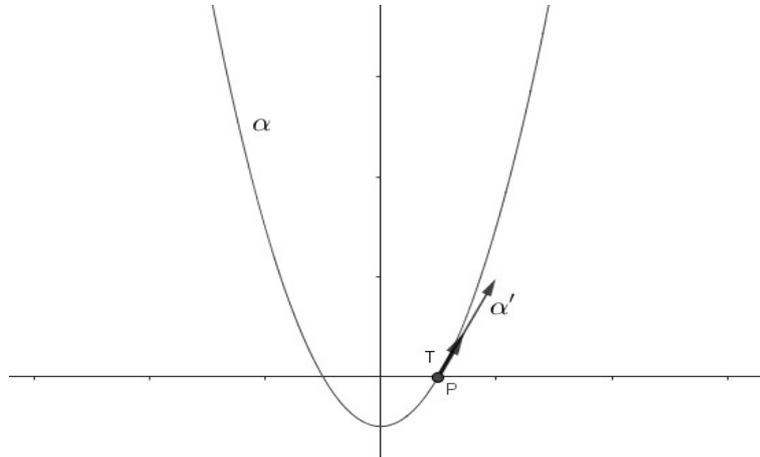
³ Uma parametrização $\alpha(t)$ é dita suave em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se $\alpha'(t)$ for contínua, diferente de 0.

⁴ Tenenblat (2008, p. 34).

⁵ Tenenblat (2008, p. 32).

A Figura 3.2 exibe o vetor tangente unitário da curva descrita acima $\alpha(t) = (t, t^2 - 1)$ também em $t = 1$, cujo Vetor tangente unitário é $T(t) = (\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}})$.

Figura 3.2 – Vetor tangente unitário, $T(t) = (\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}})$



Fonte:Próprio autor. (2023).

3.2.2 Vetor Normal

Observe que como $\|T(t)\| = 1, \forall t \in I$, segue que $T'(t)$ é ortogonal a $T(t)$,. De fato,

$$\langle T(s), T(s) \rangle = \|T(t)\|^2$$

$$\langle T(s), T(s) \rangle = 1.$$

Pelo item 4 do Teorema 3.2 , tem-se:

$$\langle T'(s), T(s) \rangle + \langle T(s), T'(s) \rangle = 0$$

$$2\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$$

$$\langle T'(s), T(s) \rangle = 0.$$

Assim defini-se o vetor normal unitário:

Definição 3.4.⁶ Dada $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, defini-se o vetor normal unitário $N(t)$, ortogonal a $T(t)$, por :

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

⁶ Stewart (2016).

Sabendo que $N(t)$ e $T(t)$ são ortogonais, aplicando uma rotação R em $T(t)$ de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ tem-se que:

$$\begin{aligned} N(t) &= R \cdot T(t) \\ N(t) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_T(t) \\ y_T(t) \end{vmatrix} \\ N(t) &= \begin{vmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{x'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\ \frac{y'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\ \frac{x'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \end{vmatrix} \\ N(t) &= \left(\frac{-y'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{x'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right). \end{aligned}$$

Logo obtém-se duas formas para se encontrar o vetor normal de uma curva α em t :

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

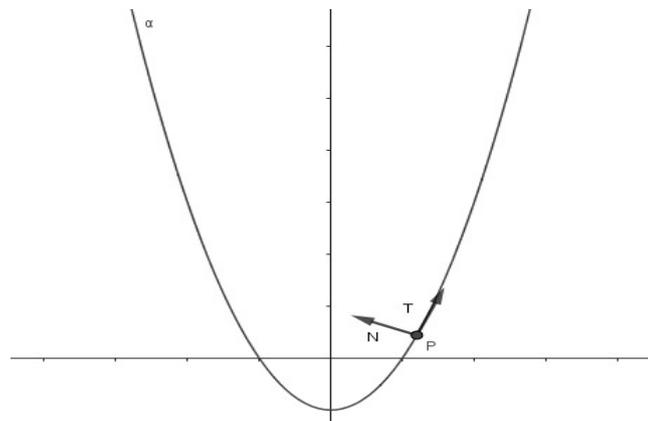
ou

$$N(t) = \left(-\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right). \quad (3.2)$$

A Figura 3.3 exhibe o vetor normal unitário da curva $\alpha(t) = (t, t^2 - 1)$ em $t = 1$:

$$N(t) = \left(-\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right).$$

Figura 3.3 – Vetor Normal unitário, $N(t) = \left(-\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)$



Fonte: Próprio autor. (2023).

A base $\{T(s), N(s)\}$ é o referencial de Frenet⁷ de uma curva $\alpha(s)$.

⁷ Ver Delgado e Frensel (2017, p.14-15).

3.3 Curvatura

Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco⁸ e $T(s)$ e $N(s)$ vetores unitários tangente e normal, respectivamente.

Sendo $N(s)$ ortogonal a $T(s)$, segue que $T'(s)$ é proporcional a $N(s)$, isto é,

$$T'(s) = K(s) \cdot N(s).$$

onde $K(s)$ é o fator proporcionalidade, chamado *curvatura*⁹ de α em $s \in I$.

Como $T'(s) = K(s) \cdot N(s)$ e $\|N(s)\| = 1$, tem-se que:

$$\langle K(s) \cdot N(s), N(s) \rangle = \langle T'(s), N(s) \rangle$$

$$K(s) \cdot \langle N(s), N(s) \rangle = \langle T'(s), N(s) \rangle$$

$$K(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle.$$

Dada uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, definida por $\alpha(s)$ tem-se que o módulo da curvatura, $\|K(s)\|$, indica a velocidade com que os vetores tangentes mudam de direção.

Para curvas não parametrizadas pelo comprimento de arco, pode-se obter a curvatura de $\alpha(t)$, como mostra a Proposição 1¹⁰.

Proposição 1. *Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, uma curva regular. Então,*

$$K(t) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.4 Círculo osculador e Evoluta

O Plano determinado pelos vetores $T(t)$ e $N(t)$ é chamado "Plano osculador" de uma curva $\alpha(t)$ num ponto P , o nome vem do latim "*osculum*", que significa "beijo". Para uma curva plana o plano osculador é o plano que contém a curva.

Definição 3.5.¹¹ *Chama-se círculo osculador o círculo contido no plano osculador de $\alpha(t)$ em um ponto P , que tem a mesma tangente que $\alpha(t)$ em P , centro $C(t)$ na mesma direção de $N(t)$ e tem raio, ρ igual ao inverso da curvatura $K(t)$:*

$$\rho(t) = \frac{1}{\|K(t)\|}.$$

⁸ Uma curva parametrizada pelo comprimento de arco é uma curva que para cada unidade de variação do parâmetro a aplicação α descreve uma curva com comprimento igual a uma unidade, isto é, para cada $t \in I$, $\alpha(t)$, varia o mesmo valor de t . Toda curva parametrizada diferenciável pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. (TENENBLAT, 2008).

⁹ como pode-se ver em Tenenblat (2008, p.45).

¹⁰ A demonstração está disponível em Tenenblat (2008, p.46), e também em Alencar e Santos (2013, p.39-40).

¹¹ Tenenblat (2008).

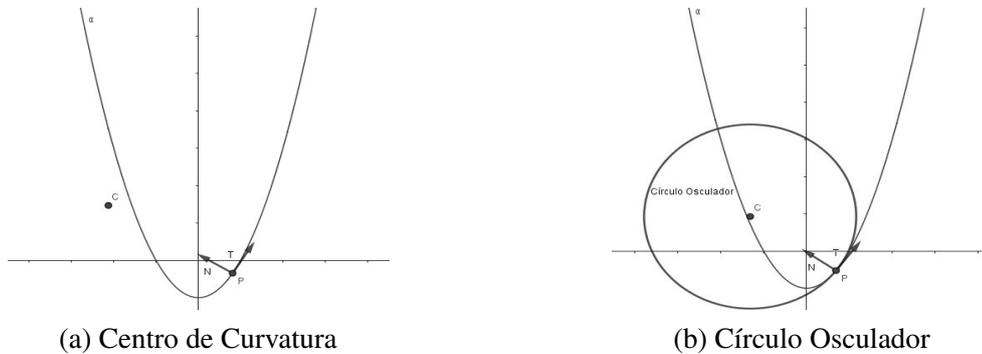
O círculo osculador é o círculo que descreve como $\alpha(t)$ se comporta perto de P ou seja quanto maior a curvatura, mais próximo fica o centro de curvatura da própria curva e quanto menor a curvatura mais distante fica o centro de curvatura em relação à curva. Assim defini-se o centro de curvatura como o ponto $C(t) = (x_C, y_C)$, centro do círculo osculador. Assim:

$$(x_C, y_C) - (x(t), y(t)) = \frac{1}{K(t)} \cdot N(t)$$

$$C(t) = \alpha(t) + \frac{1}{K(t)} \cdot N(t). \quad (3.3)$$

As Figura 3.4a, Figura 3.4b e Figura 3.5 exibem um centro de curvatura, um círculo osculador e a evoluta, respectivamente, da curva $\alpha(t) = (t, t^2 - 1)$.

Figura 3.4 – Centro de Curvatura e Círculo Osculador de uma curva α

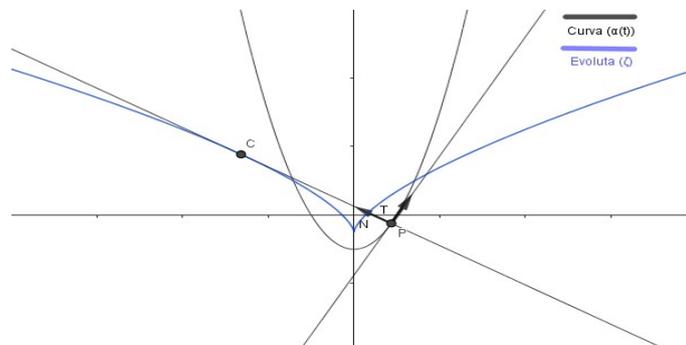


Fonte:Próprio autor. (2023).

Definição 3.6.¹² O centro de curvatura descreve uma curva ζ chamada de evoluta da curva α .

As retas tangentes de ζ são ortogonais a curva α , Figura 3.5, a medida que o parâmetro varia.

Figura 3.5 – Evoluta(ζ) de uma curva α .



Fonte:Próprio autor. (2023).

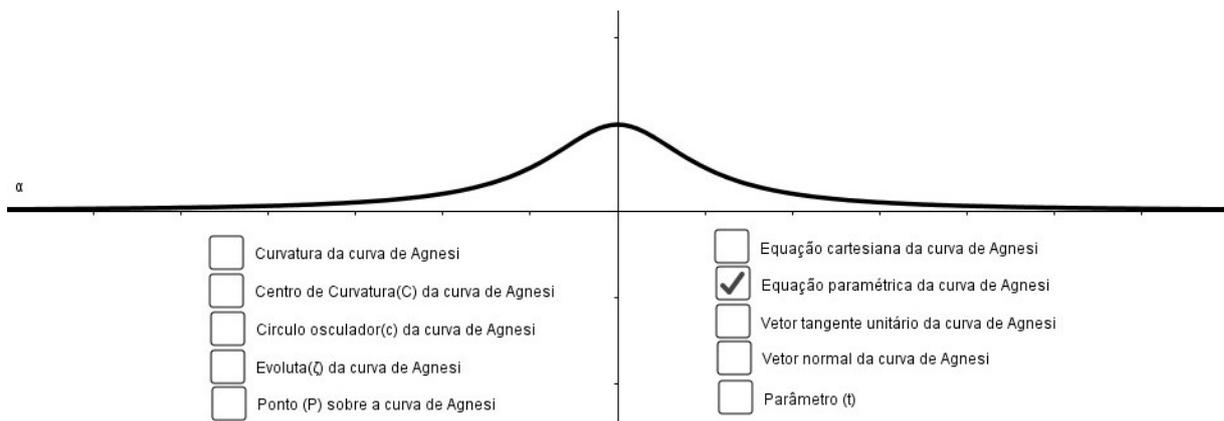
¹² Tenenblat (2008).

4 ESTUDO DIFERENCIAL DA CURVA DE AGNESI

Construiu-se no Capítulo 2 as equações paramétricas da curva de Agnesi. Para o desenvolvimento desse Capítulo, afim de aplicar os conceitos exibidos no Capítulo 3, com mais simplicidade, escolheu-se a parametrização dada na Equação 4.1 que descreve a Curva de Agnesi. Considerou-se, na Equação 4.1, o valor de $a = 1$. Assim,

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{1}{t^2 + 1} \right). \quad (4.1)$$

Figura 4.1 – Curva de Agnesi, forma paramétrica



Fonte: Próprio autor.(2023).

4.1 Vetores tangente e normal

Como definido no Capítulo 3, o vetor tangente (Definição 3.3), é a derivada de $\alpha(t)$, ou seja, $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. Aplicado a equação paramétrica Equação 4.1 tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{d}{dt} \left(t, \frac{1}{t^2 + 1} \right) \\ &= \left(1, \frac{d}{dt} (t^2 + 1)^{-1} \right) \\ &= \left(1, - (t^2 + 1)^{-2} \cdot 2t \right) \\ &= \left(1, -\frac{2t}{(t^2 + 1)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

que é o vetor tangente a curva $\alpha(t)$.

Para obter o vetor normal deve-se primeiro ajustar o vetor tangente para que ele fique na forma unitária e para isso precisa-se do valor absoluto ou módulo do vetor, veja:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2t}{(t^2+1)^2}\right)^2}$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}} \quad (4.3)$$

e assim pode-se obter o vetor tangente unitário, Figura 4.2, dividindo o vetor tangente pelo módulo do mesmo, como se pode ver a seguir:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}}, \frac{-\frac{2t}{(t^2+1)^2}}{\sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}} \right) \quad (4.4)$$

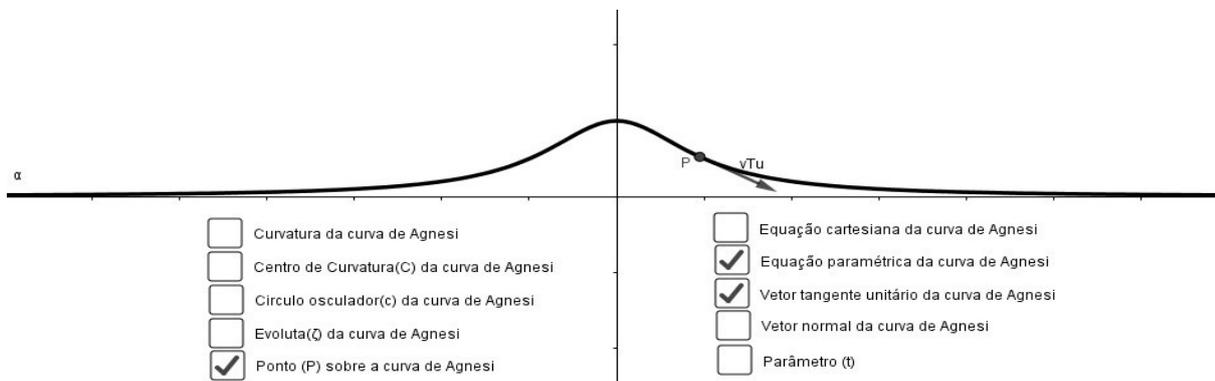
note que :

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}} & y_T(t) &= \frac{-\frac{2t}{(t^2+1)^2}}{\sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{4t^2 + (t^2+1)^4}{(t^2+1)^4}}} & &= -\frac{2t}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}} \\ &= \frac{\sqrt{(t^2+1)^4}}{\sqrt{4t^2 + (t^2+1)^4}} & &= -\frac{2t}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4t^2 + (t^2+1)^4}{(t^2+1)^4}}} \\ &= \sqrt{\frac{(t^2+1)^4}{4t^2 + (t^2+1)^4}} & &= -\frac{2t}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{(t^2+1)^2}{\sqrt{4t^2 + (t^2+1)^4}} \\ &= \frac{(t^2+1)^2}{\sqrt{4t^2 + (t^2+1)^4}} & &= -\frac{2t}{\sqrt{4t^2 + (t^2+1)^4}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

portanto

$$T(t) = \left(\frac{(t^2+1)^2}{\sqrt{4t^2 + (t^2+1)^4}}, -\frac{2t}{\sqrt{4t^2 + (t^2+1)^4}} \right) \quad (4.6)$$

Figura 4.2 – Vetor tangente unitário da curva de Agnesi



Dado que o vetor normal unitário $N(t)$, Definição 3.4, à curva $\alpha(t)$, é ortogonal ao vetor tangente unitário Figura 4.2, assim como mostrado na subseção 3.2.2 tem-se que $N(t) = \left(-\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}} \right)$ logo tem-se que o vetor normal da curva de Agnesi, Figura 4.3, é dado por:

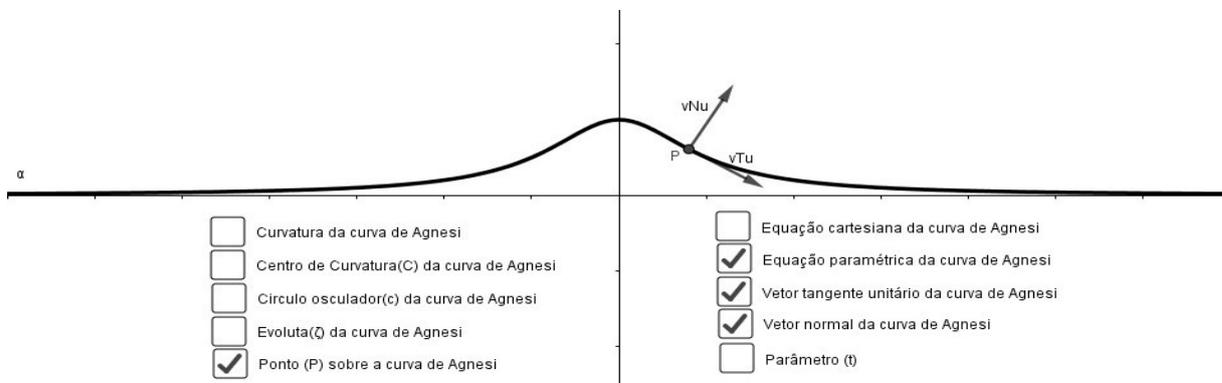
$$N(t) = \left(\frac{\frac{2t}{(t^2+1)^2}}{\sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}} \right). \quad (4.7)$$

De maneira análoga, a Equação 4.5, pode-se simplificar o vetor $N(t)$, obtendo:

$$N(t) = \left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2 + (t^2 + 1)^4}}, \frac{(t^2 + 1)^2}{\sqrt{4t^2 + (t^2 + 1)^4}} \right) \quad (4.8)$$

No link <<https://www.geogebra.org/m/htdsctjd>>, ao movimentar o parâmetro t , é possível observar o comportamento dos vetores tangente e normal ao longo da curva de Agnesi (nas caixas de seleção, selecione apenas: "Equação paramétrica da curva de Agnesi"; o "Ponto (P) sobre a curva de Agnesi"; o "Vetor tangente unitário da curva de Agnesi" e o "Vetor normal da curva de Agnesi"). Conforme Figura 4.3

Figura 4.3 – Vetor normal unitário da curva de Agnesi



Fonte: Próprio autor. (2023).

Observação: no Apêndice A demonstra-se a equação que descreve o vetor normal em cada ponto t utilizando diretamente a Definição 3.4.

4.2 Curvatura

Considerando a proporcionalidade relacionada aos vetores $T(t)$ e $N(t)$, denominada curvatura $K(t)$ da curva $\alpha(t)$, tem-se, pela Proposição 1, que:

$$K(t) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como em $\alpha(t)$ a abscissa corresponde a $x(t) = t$, tem-se $x'(t) = 1$ e a segunda derivada é $x''(t) = 0$. A ordenada de $\alpha(t)$ corresponde a $y(t) = \frac{1}{(t^2+1)}$ e sua derivada é $y'(t) = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}$ e segunda derivada é:

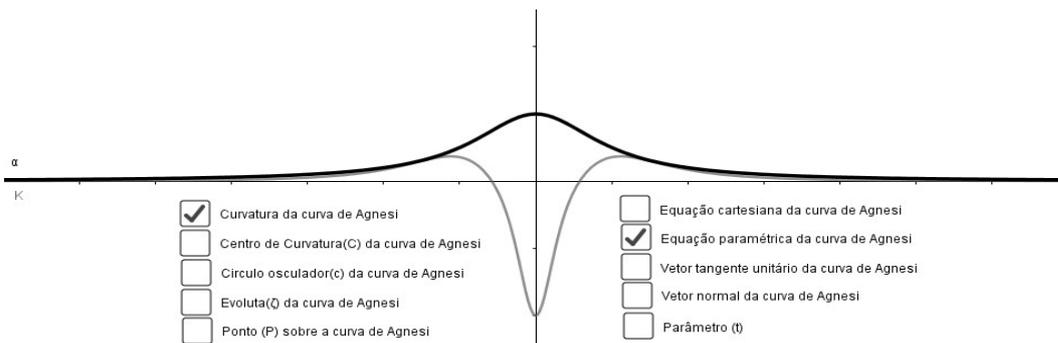
$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{2t}{(t^2+1)^2} \right) \\ &= -2 \cdot \frac{(t^2+1)^2 - 4t(t^2+1)t}{((t^2+1)^2)^2} \\ &= -2 \cdot \frac{(t^2+1) \cdot ((t^2+1) - 4t^2)}{(t^2+1)^4} \\ &= -2 \cdot \frac{-(3t^2-1) \cdot (t^2+1)}{(t^2+1)^4} \\ &= \frac{-2(-3t^2+1)}{(t^2+1)^3} \end{aligned}$$

Consequentemente a curvatura é dada por:

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{0 + \frac{-2(-3t^2+1)}{(t^2+1)^3}}{\left(1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\frac{-2(-3t^2+1)}{(t^2+1)^3}}{\left(1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}} \\ &= \frac{\frac{-2(-3t^2+1)}{(t^2+1)^3}}{\left(\frac{4t^2+(t^2+1)^4}{(t^2+1)^4}\right) \cdot \frac{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}}{(t^2+1)^2}} \\ &= \frac{\frac{-2(-3t^2+1)}{(t^2+1)^3}}{\frac{\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3}}{(t^2+1)^6}} \\ &= \frac{-2(-3t^2+1)}{(t^2+1)^3} \cdot \frac{(t^2+1)^6}{\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3}} \\ &= \frac{-2(-3t^2+1) \cdot (t^2+1)^3}{\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por definição $\|K(t)\|$, mede a velocidade com que os vetores tangentes à curva $\alpha(t)$ mudam de direção. A Figura 4.4 exibe a curva de Agnesi e a curva descrita pela função curvatura.

Figura 4.4 – Representação geométrica da curvatura da curva de Agnesi



Fonte: Próprio autor. (2023).

4.3 Círculo osculador

Dado centro e raio é possível descrever uma circunferência, chamada de Círculo osculador, Definição 3.5 cujo o raio, $\rho(t)$ é o inverso do módulo da Curvatura da curva $\alpha(t)$ Equação 4.1:

$$\rho(t) = \frac{1}{\|K(t)\|} = \frac{1}{\left\| \frac{-2(-3t^2+1) \cdot (t^2+1)^3}{\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3}} \right\|} \quad (4.10)$$

$$\rho(t) = \frac{1}{\|K(t)\|} = \left\| \frac{\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3}}{-2(-3t^2+1) \cdot (t^2+1)^3} \right\|$$

O centro da circunferência é obtido pela fórmula:

$$C(t) = \alpha(t) + \frac{1}{K(t)} \cdot N(t)$$

Substituindo os dados das expressões acima obtém-se a seguinte expressão:

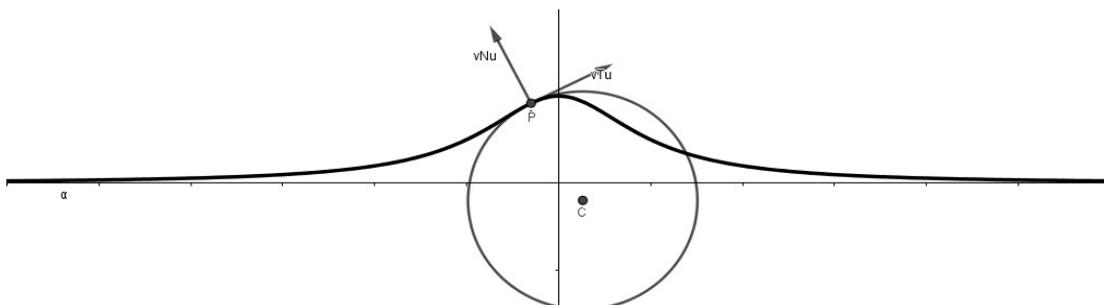
$$C(t) = \left(t, \frac{1}{t^2+1} \right) + \frac{(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}{-2(-3t^2+1) \cdot (t^2+1)^3} \cdot \left(\frac{\frac{2t}{(t^2+1)^2}}{\sqrt{1+\frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}}, \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}} \right) \quad (4.11)$$

$$C(t) = \left(t + \frac{-2t}{-2(-3t^2+1) \cdot (t^2+1)^3}, \frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{-2(-3t^2+1) \cdot (t^2+1)} \right)$$

Assim, para qualquer $t \in I \subset \mathbb{R}$ por meio das expressões $\rho(t)$ Equação 4.10 e $C(t)$ Equação 4.11, é possível descrever o Círculo osculador percorrendo a curva de Agnesi, uma vez da esquerda para direita.

No link <<https://www.geogebra.org/m/htdsctjd>>, ao movimentar o parâmetro t, é possível observar o comportamento dos centros de curvatura e dos círculos osculadores associados à curva de Agnesi, como exposto na Figura 4.5

Figura 4.5 – Círculo osculador da curva de Agnesi



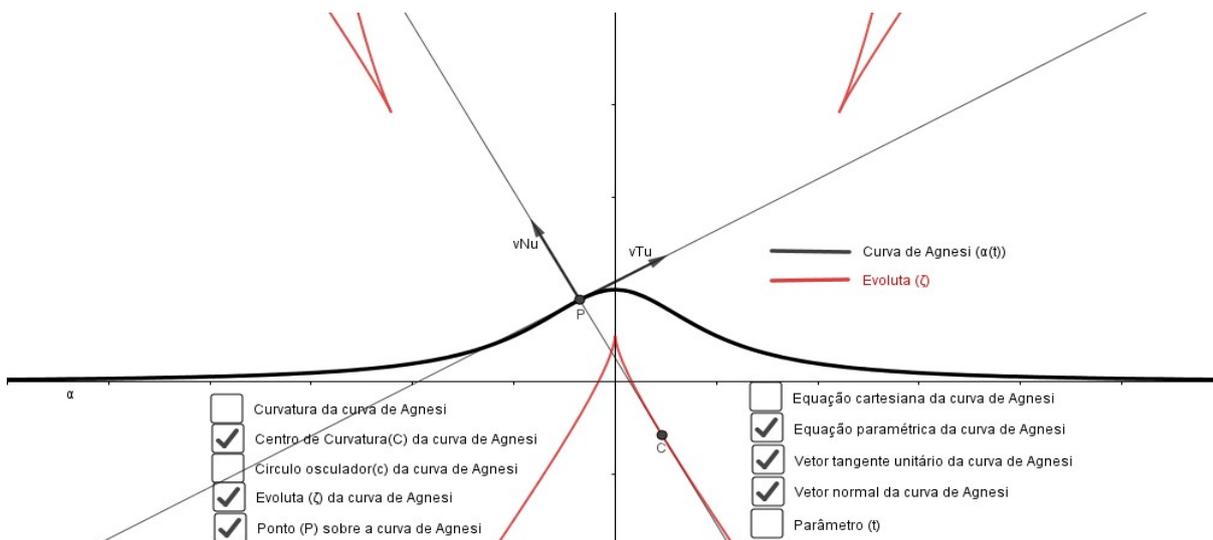
Fonte: Próprio autor. (2023).

Note que o centro de curvatura da curva de Agnesi, está na direção do vetor normal unitário. Quanto maior a curvatura, mais próximo fica o centro de curvatura da própria curva de Agnesi e quanto menor a curvatura mais distante fica o centro de curvatura em relação à curva. Note, ainda, que a medida que a curvatura cresce o raio do círculo osculador diminui e de forma análoga quando a curvatura tende a ser pequena o círculo osculador tende a ter raio muito grande. Observe, também, que o círculo osculador e a curva de Agnesi compartilham o ponto P , dito intersecção da curva com o círculo e os mesmos vetores tangentes neste ponto.

4.3.1 Evoluta

Como dito no Capítulo 3 na seção 3.4, o centro de curvatura descreve uma curva ζ cuja as retas tangentes são ortogonais a curva α , esta curva é chamada de evoluta de α , gerada pelo lugar geométrico do centro de curvatura como pode-se ver na Figura 4.6, a seguir:

Figura 4.6 – Evoluta da curva de Agnesi



Fonte:Próprio autor. (2023).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer do trabalho foi visto um breve contexto histórico relativo a geometria e seu percurso até o conhecido como Geometria Diferencial, apresentando nomes importantes de seu desenvolvimento como Gauss e Riemann, dentre outros. Viu-se ainda sobre a origem e história de Maria Gaetana Agnesi e sua importância na matemática, além da origem da curva que carrega seu nome que embora por erro de tradução ganhou nome de bruxa ou feiticeira. A partir da construção da curva foram obtidas as equações cartesiana e paramétrica.

Viu-se também a teoria referente a Geometria Diferencial para curvas planas, apresentando definições como a de curva parametrizada e curva parametrizada regular, além de vetores tangente e normal unitários, o referencial de Frenet, e ainda definição de curvatura de uma curva que não esteja parametrizada por comprimento de arco. Viu-se também como encontrar o centro de curvatura e círculo osculador, além de encontrar a evoluta de uma curva parametrizada regular, sendo a evoluta o lugar geométrico do eixo de curvatura.

Foi deduzida uma forma paramétrica utilizada no Capítulo 4 afim de simplificar alguns cálculos, utilizando o "x" como o próprio parâmetro "t" e fazendo "y" igual a equação cartesiana $\frac{1}{t^2+1}$, viu-se os resultados obtidos através da teoria apresentada, os vetores tangente e normal da curva de Agnesi, além de sua curvatura e como se comporta seu centro de curvatura, círculo osculador e evoluta.

Apesar do trabalho dar ênfase à curva de Agnesi, os conceitos vistos podem ser aplicados a outras curvas planas. Além disso, tais conceitos podem ser aprofundados, possibilitando o estudo de curvas no espaço. Pode-se estudar conceitos como vetor binormal, torção e sólido de revolução.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, H.; SANTOS, W. *Alguns Teoremas de Curvas Convexas no Plano*. Santarém (PA): II Colóquio de Matemática da Região Norte, 2013. 118 p. Acesso em 20 de novembro de 2022. ISBN 978-85-65791-05-2. Disponível em: <<http://www.im.ufal.br/professor/hilario/?ddownload=224>>.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Tradução de Elza F. Gomide. ISBN 978-85-212-0023-9.
- BOYER, C. B. *Historia da matemática*. 3ª norte americana. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012. Tradução de Helena Castro. ISBN 978-85-212-0641-5.
- CARMO, M. P. do. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. 3ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. ISBN 978-85-85818-26-5.
- DELBEM, N. F. *Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos*. 144 p. Dissertação (Dissertação (mestrado)) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas., Rio claro, 2010.
- DELGADO, J.; FRENSEL, K. Geometria diferencial 1. 2017. Disponível em: <<https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/delightful-downloads/2019/09/gdif.pdf>>.
- DOLCE, O.; POMPEU, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana*. 9ª. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2013. v. 9. ISBN 978-85-357-1687-0.
- EUCLIDES. *Os elementos*. 2ª. ed. [S.l.]: Unesp, 2009. 600 p. Tradução de Irineu Bicudo. ISBN 978-85-7139-935-8.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5ª. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- GORODSKI, C. Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria. *Revista Humboldtbrasil*, São Paulo, p. 61–77, 2002. Acesso em 6 de junho de 2022. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~gorodski/ps/geom.doc>>.
- REIS, G. L. dos; SILVA, V. V. da. *Geometria analítica*. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora LTDA, 1984. ISBN 85-216-0357-6.
- SANTOS, C. P. F. dos. *Fundamentos de Geometria e Astronomia Esférica*. 170 p. Dissertação (Dissertação (mestrado profissional)) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, Rio Claro, 2020.
- STEWART, J. *Cálculo*. 8ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 2. ISBN 978-8522125845.
- TENENBLAT, K. *Introdução a Geometria diferencial*. 2ª. ed. São Paulo: Blücher, 2008. ISBN 978-85-212-0467-1.

APÊNDICE A – VETOR NORMAL UNITÁRIO PELA DEFINIÇÃO

Calculando o vetor normal unitário à curva $\alpha(t) = \left(t, \frac{1}{t^2+1}\right)$ utilizando a Definição 3.4, tem-se:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

$$N(t) = \left(\frac{x'_T}{\|T'(t)\|}, \frac{y'_T}{\|T'(t)\|} \right).$$

note que $x'_T(t) = \left(\frac{x'_\alpha}{\|\alpha'(t)\|}\right)$ e $y'_T(t) = \left(\frac{y'_\alpha}{\|\alpha'(t)\|}\right)$, calculando $x'_T(t), y'_T(t)$ e $\|T'(t)\|$, tem-se que:

$$\begin{aligned} x'_T(t) &= \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\frac{(t^2+1)^4}{4t^2+(t^2+1)^4}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{(t^2+1)^4}{4t^2+(t^2+1)^4}}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{(t^2+1)^4}{4t^2+(t^2+1)^4} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{(t^2+1)^4}{4t^2+(t^2+1)^4}}} \cdot \frac{\frac{d}{dt}((t^2+1)^4)(4t^2+(t^2+1)^4) - \frac{d}{dt}(4t^2+(t^2+1)^4)(t^2+1)^4}{(4t^2+(t^2+1)^4)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{(t^2+1)^4}{4t^2+(t^2+1)^4}}} \cdot \frac{(4(t^2+1)^3(2t))(4t^2+(t^2+1)^4) - (8t+4(t^2+1)^3(2t))((t^2+1)^4)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{(t^2+1)^4}{4t^2+(t^2+1)^4}}} \cdot \frac{(8t(t^2+1)^3)(4t^2+(t^2+1)^4) - (8t+8t(t^2+1)^3)((t^2+1)^4)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{(t^2+1)^4}{4t^2+(t^2+1)^4}}} \cdot \frac{32t^3(t^2+1)^3 - 8t(t^2+1)^4}{(4t^2+(t^2+1)^4)^2} \\ &= \frac{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}}{2(t^2+1)^2} \cdot \frac{32t^3(t^2+1)^3 - 8t(t^2+1)^4}{(4t^2+(t^2+1)^4)^2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}\right) \left(32t^3(t^2+1)^3 - 8t(t^2+1)^4\right)}{2(t^2+1)^2(4t^2+(t^2+1)^4)^2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}\right) \left(32t^3(t^2+1)^3 - 8t(t^2+1)^4\right)}{\frac{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}}{2(t^2+1)^2(4t^2+(t^2+1)^4)^2}} \\ &= \frac{32t^3(t^2+1)^3 - 8t(t^2+1)^4}{2(t^2+1)^2(4t^2+(t^2+1)^4)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}} \\ &= \frac{(t^2+1)^3(32t^3 - 8t(t^2+1))}{2(t^2+1)^2(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(t^2+1)^3(32t^3 - 8t^3 - 8t)}{(t^2+1)^3(32t^3 - 8t^3 - 8t)}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2(t^2+1)^2(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}{(t^2+1)^3(8(4t^3 - t^3 - t))}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2(t^2+1)^2(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}{(t^2+1)^3(8t(3t^2-1))}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2(t^2+1)^2(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}{8(t^2+1)^3 \cdot t(3t^2-1)}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2(t^2+1)^2(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}{4t(t^2+1)(3t^2-1)} \\ &= \frac{(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}{4t(t^2+1)(3t^2-1)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y'_T(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{-2t}{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}} \right) \\
&= -2 \cdot \frac{\frac{d}{dt}(t) \left(\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4} \right) - \frac{d}{dt} \left(\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4} \right) (t)}{\left(\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4} \right)^2} \\
&= -2 \cdot \frac{\left(\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4} \right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4} \right)^{-1} (8t+8t(t^2+1)^3)(t)}{4t^2+(t^2+1)^4} \\
&= -2 \cdot \frac{\left(\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4} \right)^2}{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}} - \frac{1}{2 \left(\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4} \right)} \cdot (8t+8t(t^2+1)^3)(t)}{4t^2+(t^2+1)^4} \\
&= -2 \cdot \frac{\left(\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4} \right)^2 - (4t^2+4t^2(t^2+1)^3)}{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}} \\
&= -2 \cdot \frac{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}}{4t^2+(t^2+1)^4} \\
&= -2 \cdot \frac{(4t^2+(t^2+1)^4 - 4t^2 - 4t^2(t^2+1)^3)}{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}} \cdot \frac{1}{4t^2+(t^2+1)^4} \\
&= -2 \cdot \frac{(t^2+1)^4 - 4t^2(t^2+1)^3}{\left(\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3} \right)} \\
&= -2 \cdot \frac{(t^2+1)^2((t^2+1)^2 - 4t(t^2+1))}{\left(\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3} \right)} \\
&= -2 \cdot \frac{(t^2+1)^2(t^4+2t^2-4t^2(t^2+1))}{\left(\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3} \right)} \\
&= -2 \cdot \frac{(t^2+1)^2(t^4+2t^2+1-4t^4-4t^2)}{\left(\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3} \right)} \\
&= -2 \cdot \frac{(t^2+1)^2(-3t^4+2t^2-1)}{\left(\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3} \right)} \\
&= -2 \cdot \frac{(t^2+1)^2(-3t^4+3t^2-t^2-1)}{\left(\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3} \right)} \\
&= -2 \cdot \frac{(t^2+1)^2(-3t^2-1)(t^2+1)}{\left(\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3} \right)} \\
&= -2 \cdot \frac{-(t^2+1)^3(3t^2-1)}{\left(\sqrt{(4t^2+(t^2+1)^4)^3} \right)} \\
&= \frac{2(t^2+1)^3(3t^2-1)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

logo a derivada de $T(t)$, aplicando as regras do quociente e da cadeia, é:

$$T'(t) = \left(\frac{4t(t^2+1)(3t^2-1)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2(t^2+1)^3(3t^2-1)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (\text{A.1})$$

assim o módulo de $T'(t)$ é $\|T'(t)\| = \sqrt{(x'_{T'}(t))^2 + (y'_{T'}(t))^2}$, ou seja:

$$\begin{aligned}
 \|T'(t)\| &= \sqrt{\left(\frac{4t(t^2+1)(3t^2-1)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{2(t^2+1)^3(3t^2-1)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{16t^2(t^2+1)^2(3t^2-1)^2}{(4t^2+(t^2+1)^4)^3} + \frac{4(t^2+1)^6(3t^2-1)^2}{(4t^2+(t^2+1)^4)^3}} \\
 &= \sqrt{\frac{(16t^2(t^2+1)^2(3t^2-1)^2) + (4(t^2+1)^6(3t^2-1)^2)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^3}} \\
 &= \sqrt{\frac{(3t^2-1)^2(16t^2(t^2+1)^2 + 4(t^2+1)^6)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^3}} \\
 &= \sqrt{\frac{(3t^2-1)^2(4(t^2+1)^2(4t^2+(t^2+1)^4))}{(4t^2+(t^2+1)^4)^3}} \\
 &= \sqrt{\frac{4(t^2+1)^2(3t^2-1)^2}{(4t^2+(t^2+1)^4)^2}} \\
 &= \frac{2(t^2+1)(3t^2-1)}{4t^2+(t^2+1)^4}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

logo fazendo $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ tem-se que:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \left(\frac{4t(t^2+1)(3t^2-1)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2(t^2+1)^3(3t^2-1)}{(4t^2+(t^2+1)^4)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

simplicando os termos tem-se:

$$N(t) = \left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}}, \frac{(t^2+1)^2}{\sqrt{4t^2+(t^2+1)^4}} \right)$$

e multiplicado abscissa e ordenada de $N(t)$ Figura 4.3, tanto em cima quanto em baixo por $\frac{1}{(t^2+1)^2}$ e utilizando as propriedades de radiciação tem-se que:

$$N(t) = \left(\frac{\frac{2t}{(t^2+1)^2}}{\sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4t^2}{(t^2+1)^4}}} \right) \tag{A.3}$$

que é vetor normal unitário da curva $\alpha(t)$, em algum t pertencente ao intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e observe ainda que o resultado obtido corresponde a $N(t) = \left(-\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right)$.

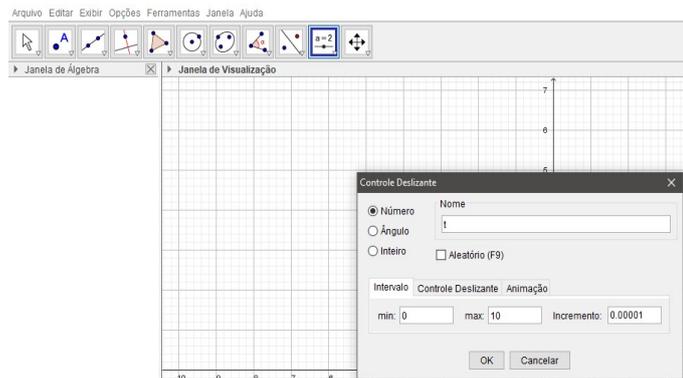
Anexos

ANEXO A – CONSTRUÇÃO DA CURVA DE AGNESI, UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

Para construir a Curva de Agnesi utilizando o *Software* Geogebra deve-se seguir uma série de passos como são descritos a seguir.

- Criar um controle deslizante nomeando de (t) por exemplo, em seguida ajustar o parâmetro com mínimo em 0 e máximo em 10 com incremento de 0.0001.

Figura A.1 – Controle deslizante t



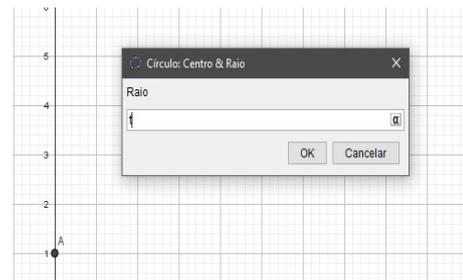
Fonte: Próprio autor.(2023).

- Criar o centro da circunferência na caixa de Entrada: utilizando o seguinte comando $A = (0, t)$ em seguida clique em *Enter*, para criar a circunferência utiliza o comando Círculo dados centro e raio e clicando sobre o ponto A abrirá uma caixa onde deve-se selecionar o controle deslizante t

Figura A.2 – Criando a Circunferência



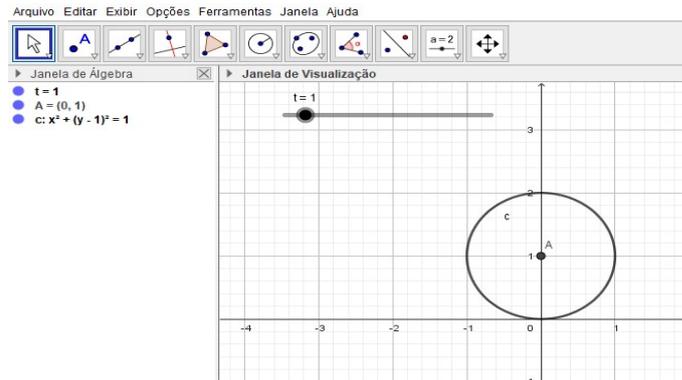
(a) Comando Circunferência dados centro e Raio



(b) Raio da Circunferência

Fonte: Próprio autor. (2023).

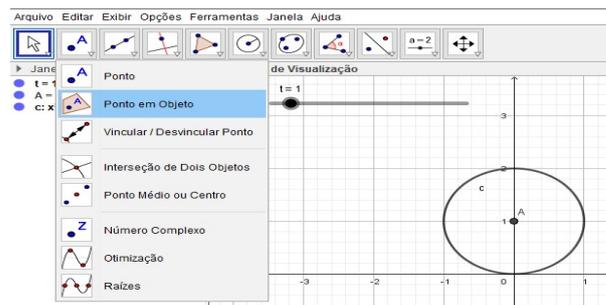
Figura A.3 – Circunferência



Fonte:Próprio autor. (2023).

- Utilizando também o comando Ponto em Objeto e clicar sobre a circunferência, na intersecção com o eixo das abcissas.

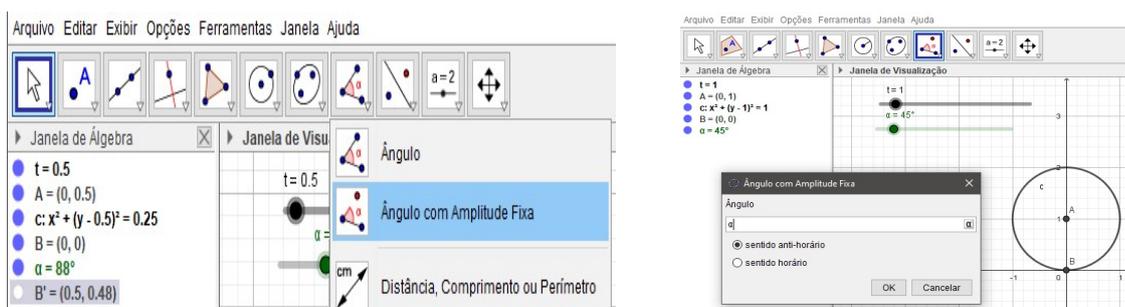
Figura A.4 – Ponto sobre a Circunferência



Fonte:Próprio autor. (2023).

- Crie um segundo controle deslizante agora para se obter um ângulo α variando entre 0° e 360° , com incremento de 0.001. Em seguida criar um ângulo com amplitude fixa e em seguida clique respectivamente nos pontos B e A . na caixa que se abrir deve-se trocar o valor do ângulo para o valor α para que se possa movimentar a curva o ponto B' sobre a Circunferência.

Figura A.5 – Criando o ponto que se move sobre a Circunferência



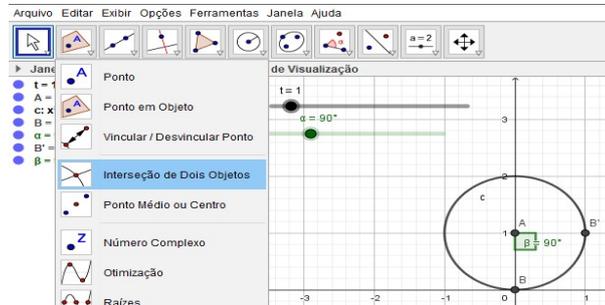
(a) Comando Ângulo com amplitude fixa

(b) Comando para movimentar o ângulo

Fonte:Próprio autor. (2023).

- Criar uma interseção de objetos e clicar sobre a Circunferência na interseção com o eixo das ordenadas, criando assim o ponto C .

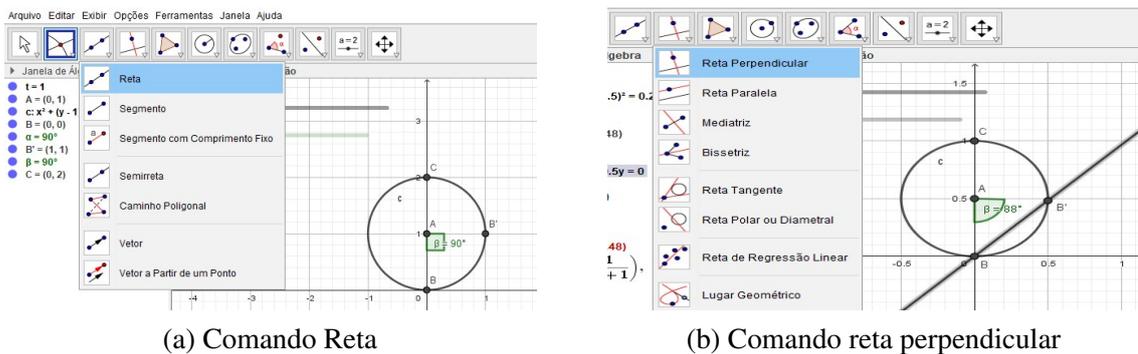
Figura A.6 – Comando Interseção de Objetos



Fonte:Próprio autor. (2023).

- Criar uma reta entre os pontos B e B' . Em seguida criar uma reta perpendicular clicando no comando reta perpendicular e clique sobre o eixo das ordenadas e arraste até o ponto C .

Figura A.7 – Comando para criar retas



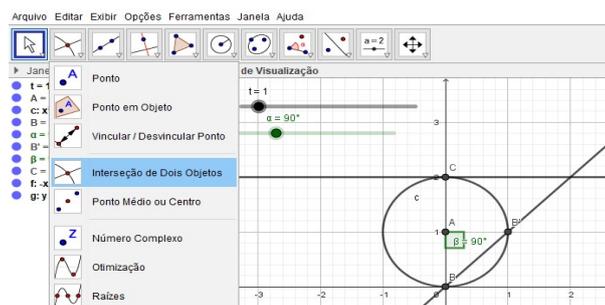
(a) Comando Reta

(b) Comando reta perpendicular

Fonte:Próprio autor. (2023).

- Criar ponto D de interseção de dois objetos e clicar na interseção da reta que passa pelos pontos B e B' e a reta que passa pelo ponto C .

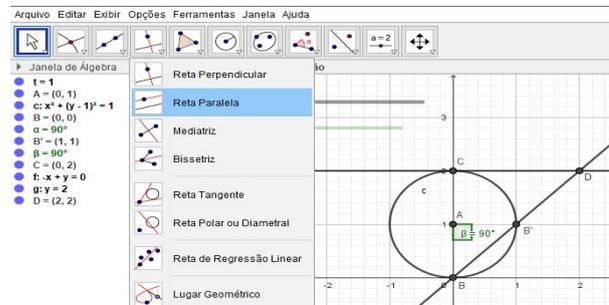
Figura A.8 – Comando para criar o ponto D



Fonte:Próprio autor. (2023).

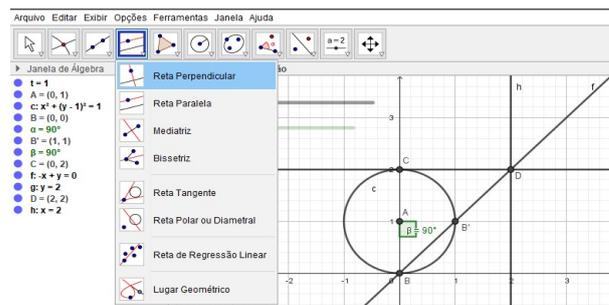
- Criar uma reta paralela com o eixo das ordenadas clicando sobre o eixo e arrastando até o ponto D , em seguida criar outra reta perpendicular ao eixo das ordenadas clicando sobre o mesmo e arrastando até o ponto B' .

Figura A.9 – Comando reta paralela



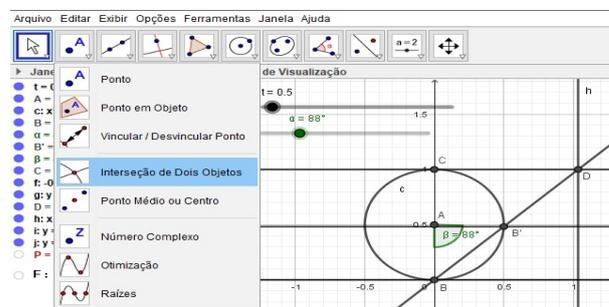
Fonte:Próprio autor. (2023).

Figura A.10 – Comando reta perpendicular



Fonte:Próprio autor. (2023).

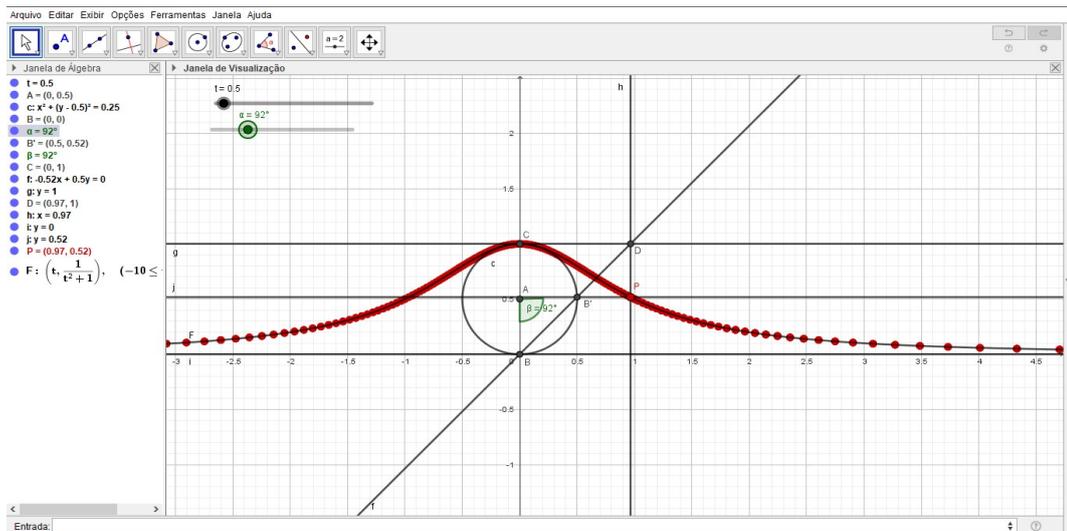
- Criar ponto P como interseção de dois objetos e clicar sobre a interseção da retas que passa pelo ponto D com a reta que passa pelo ponto B'

Figura A.11 – Comando para criar o ponto P 

Fonte:Próprio autor. (2023).

- Pode-se ainda alterar a cor e o tamanho do ponto P , na janela de álgebra localize o ponto P e clique com o botão direito sobre e habilite a função Habilitar rastro em seguida clique sobre o Controle deslizante α e habilite a função animar, assim pode-se observar que o lugar geométrico do ponto P descreve a Curva de Agnesi.

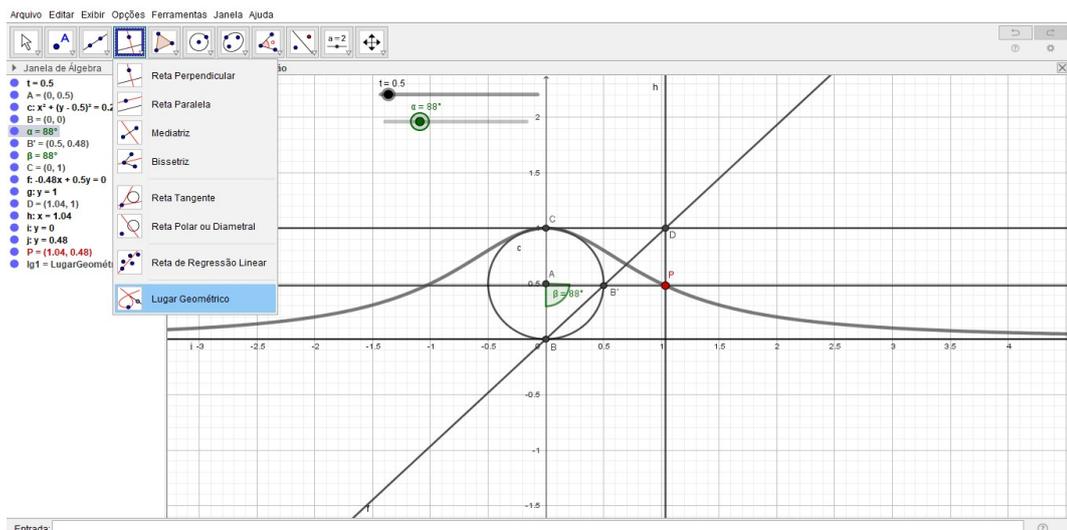
Figura A.12 – Lugar Geometrico do ponto P , chamado Curva de Agnesi



Fonte:Próprio autor. (2023).

Observe que em alguns pontos do rastro do ponto P tem quebras isto é causado pela velocidade do comando de animação do controle deslizante e também tem interferência do incremento usado, note que quanto maior o incremento por exemplo incremento igual a 20, com este incremento a curva teria quebras maiores enquanto que se o incremento for muito pequeno como 0.00001 as quebras ficaram quase imperceptíveis, e pode se ainda utilizar o comando chamado Lugar Geométrico, clicando sobre o ponto P e em seguida sobre o controle deslizante do angulo α assim o próprio *software* mostra o lugar geométrico do ponto.

Figura A.13 – Comando para lugar geométrico



Fonte:Próprio autor. (2023).

ÍNDICE

- Curva
 - de Agnesi, 57
- Curvas
 - de Agnesi, 27, 28, 30, 41–43, 45, 46
 - Parametrizadas diferenciais, 35
 - Planas, 23, 33
- Curvatura, 23, 38, 39, 43–46
- Círculo
 - Osculador, 23, 39, 45
- Evoluta, 23, 39, 46
- Frenet, 23
- Geometria Diferencial, 21, 23, 33
- Involuta, 23
- Maria Gaetana Agnesi, 19, 24
- Maria Gaetana Agnesi , 25
- Módulo, 33, 42, 45, 53
- Produto Interno Euclidiano, 33
- Vetores
 - Normal, 37, 42, 43
 - Tangente, 27, 35, 41, 42, 46

