UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
Câmpus Central - Sede: Anápolis - CET
Curso de Matemática

O Número de Euler

GLEUDISSON PEREIRA BRANDÃO JUNIOR

Anápolis
2023

GLEUDISSON PEREIRA BRANDÃO JUNIOR

O Número de Euler

Trabalho de Curso (TC) apresentado, à Coordenação Setorial do Curso de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Graduado no Curso de Matemática da Universidade Estadual de Goiás.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Antonio Souto

Anápolis

2023

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UEG
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

PP436n

Pereira Brandão Junior, Gleudisson
O Número de Euler / Gleudisson Pereira Brandão Junior; orientador Leonardo Antônio Souto. -- Anápolis , 2023.
44 p.

Graduação - Matemática -- Câmpus Central - Sede: Anápolis - CET, Universidade Estadual de Goiás, 2023.

1. Número de Euler. 2. História do Cálculo. 3. Números Transcendentes. 4. Números Irracionais. I. Souto, Leonardo Antônio , orient. II. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS

CÂMPUS CENTRAL – SEDE: ANÁPOLIS - CET

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO DE MONOGRAFIAS DIGITAIS NO BANCO DE DADOS DO CÂMPUS CENTRAL – SEDE: ANÁPOLIS - CET

Eu Gleudisson Pereira Bandão Junior

Curso Matemática

Na qualidade de titular dos direitos de autor que recaem sobre a minha monografia de Conclusão de Curso, intitulada O Número de Euler

Defendida em 30 / 01 / 2023, junto à banca examinadora do curso com fundamento nas disposições da lei nº 9.610 de 19 de fevereiro de 1998, autorizo a disponibilizar gratuitamente a obra citada, sem ressarcimento de direitos autorais, para fins de impressão e/ou *downloading* pela *internet*, a título de divulgação da produção científica gerada pela Universidade Estadual de Goiás / Câmpus Central – SEDE: Anápolis - CET, a partir desta data.

(x) autorizo texto (completo)

(   ) autorizo parcial (resumo)

Assim, autorizo a liberação total ou resumo de meu trabalho, estando ciente que o conteúdo disponibilizado é de minha inteira responsabilidade.

Anápolis, 09 de fevereiro de 2023

Assinatura do autor

Gleudisson P. Brandão Junior

Assinatura do orientador

Leonardo Antônio Souto

ESTADO DE GOIÁS
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - UEG
COORDENAÇÃO SETORIAL MATEMÁTICA ANÁPOLIS

Gleudisson Pereira Brandão Junior

O Número de Euler

Trabalho de Curso II de Matemática apresentado à Banca Examinadora como parte dos requisitos para a obtenção do grau de graduado em Licenciatura em Matemática.

Aprovado. Banca Examinadora do Trabalho de Curso II do curso de Matemática do Campus Central: Sede - Anápolis - CET da Universidade Estadual de Goiás.

Anápolis - Goiás, 30 de janeiro de 2023.

____

Dr. Leonardo Antonio Souto

Orientador(a)/Presidente da banca examinadora

____

M.e Tiago de Lima Bento Pereira

1º Membro da Banca Examinadora

____

M.e Cejana Macedo Alkmim

2º Membro da Banca Examinadora

	Documento assinado eletronicamente por **LEONARDO ANTONIO SOUTO**, **Docente de Ensino Superior**, em 04/02/2023, às 12:13, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.

	Documento assinado eletronicamente por **CEJANA MACEDO ALKMIM**, **Docente de Ensino Superior**, em 06/02/2023, às 08:15, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.

	Documento assinado eletronicamente por **TIAGO DE LIMA BENTO PEREIRA**, **Docente de Ensino Superior**, em 07/02/2023, às 11:05, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.

	A autenticidade do documento pode ser conferida no site **http://sei.go.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=1** informando o código verificador **000037647586** e o código CRC **8AB21911**.

Este trabalho é dedicado a todos aqueles que,
de alguma forma, mesmo sem consciência de tal feito,
possibilitaram a minha caminhada até aqui.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus por ter me sustentado durante todos os momentos deste curso e por ter iluminado meus caminhos até aqui.

Quero agradecer à minha mãe a ao meu pai por terem feito o possível para me proporcionar a melhor educação que estava ao alcance, por sempre acreditar nos meus objetivos e por orarem por mim.

Aos meu irmão Guilherme e minhas irmãs Solange e Gleice, por sempre acreditarem no meu potencial, por serem tão compreensivos comigo e por estarem presentes quando eu mais precisei.

Aos meus amigos Filipe, Gabriel, Gustavo, Leandra e Murillo e Amanda por estarem comigo no curso, porque sem eles o caminho percorrido até aqui teria sido infinitamente mais difícil. Esses anos foram melhores com vocês, amigos.

Ao professor Dr. Leonardo Antônio Souto por ter aceitado me orientar neste trabalho, por toda a atenção e disponibilidade. Aprendi muito durante a produção desta pesquisa graças ao seu conhecimento. Foi uma ótima experiência ser seu orientando.

Aos demais professores dos quais fui aluno. Foi uma honra aprender com vocês.

À Universidade Estadual de Goiás pela qualidade do ensino oferecido e por oportunizar momentos de crescimento profissional no decorrer do curso.

"Embora mudado, devo me erguer o mesmo"

(Jakob Bernoulli)

RESUMO

O presente trabalho apresenta o estudo referente ao Número de Euler, *e*, ressaltando aspectos relativos à sua natureza e também algumas situações nas quais a presença deste número tem resultados consequências matemáticas interessantes. Foi realizada pesquisa bibliográfica a fim de compreender como e em qual contexto histórico se deu o surgimento do *e*, bem como o estudo para analisar questões inerentes à sua natureza, a saber, a irracionalidade, transcendência e a prova da existência de tal número. Por fim, apresentam-se aplicações, resultados e fórmulas em que o *e* tem papel central. O objetivo deste trabalho é investigar o percurso histórico do Número de Euler.

Palavras-chave: Número de Euler; Números Irracionais; Números Transcendentes; História do Cálculo.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No decorrer da história da humanidade, conforme as sociedades se tornavam mais tecnológicas e avançadas, os estudos matemáticos também se tornavam mais complexos e novos elementos deste ramo da ciência surgiam, como por exemplo, o número de Euler, que é denotado por e e tem valor aproximado de $2,71828...$ Este número tem grande importância para a ciência moderna, pois ele está presente em diversos campos de estudo matemático, seja teórico ou prático, bem como em outras diversas áreas do conhecimento.

Embora as aplicações do e sejam diversas e seu papel na ciência de modo geral tenha sido de fundamental importância, fatos relativos ao seu percurso histórico e à sua natureza não são frequentemente abordados, mesmo nas disciplinas de ensino superior, em que ele se faz presente em diversos contextos. Desta maneira, o objetivo deste trabalho é investigar o surgimento do e e sua evolução histórica, bem como estudar aspectos relacionados à sua natureza, que neste trabalho são a irracionalidade e transcendência. Para tal, utilizou-se pesquisa bibliográfica de cunho exploratório.

O trabalho é composto por 3 capítulos, sendo o primeiro, respaldado principalmente em Maor (2004) e Roque (2012), voltado ao estudo histórico deste número, apontando seu possível surgimento, que é um aspecto obscuro relativo a este número, uma vez que não se sabe ao certo quando o e foi de fato notado pela primeira vez.

No segundo capítulo, que foi baseado em livros de Cálculo e nos trabalhos de Figueiredo (2002), Ripoll, Ripoll e Silveira (2011), Furtado (1996) e Vasconcelos (2013), aborda-se temas relativos à natureza do Número de Euler, a saber sua irracionalidade e transcendência, que foram aspectos que demoraram muito a serem formados, por depender muito do desenvolvimento de outras áreas da matemática, como a Análise e a Teoria dos Números. No segundo capítulo, também é apresentada uma demonstração da existência do e, já que antes do desenvolvimento do Cálculo não era possível afirmar com certeza que tal constante existia de fato.

No último capítulo, fundamentado em Maor (2004), Thomas, Weir e Hass (2012) e Talavera (2008), são apresentadas as curvas da catenária e da espiral logarítmica, nas quais e está presente em suas equações de formação. Essas duas curvas são amplamente aplicadas em problemas de caráter prático e teórico e quando começaram a ser estudadas chamaram a atenção da comunidade científica da época, por conta de suas propriedades e características matemáticas ou por suas aplicações práticas. Ainda neste capítulo, são abordadas a derivada da função e^x e a equação $e^{i\pi}+1=0$. Essas duas relações possuem características únicas interessantes e marcaram a história do e por suas consequências matemáticas.

1 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DO NÚMERO DE EULER

Os números sempre estiveram presentes no desenvolvimento da civilização humana. Denise Schmandt-Besserat, especialista em arte e arqueologia do Antigo Oriente Próximo, propôs nos anos 1990 a tese de que a forma de escrita mais antiga teria origem em um sistema de contagem. Ela notou o surgimento de vários tokens em formatos diversos - cones, esferas, discos e etc. Tais objetos eram utilizados primeiramente nas áreas de economia para controle de produtos agrícolas e posteriormente, já na fase urbana, serviam para controle de bens manufaturados. Com os avanços que se sucederam, os tokens eram guardados em invólucros que tinham em sua superfície suas marcas respectivas, o que indicava quais estavam em seu interior. Mais tarde, os contadores do quarto milênio a.E.C perceberam que o conteúdo dos invólucros eram desnecessários, uma vez que a superfície já estava marcada com os sinais que indicavam o que estava sendo guardado e, essas marcas passaram a incluir sinais feitos com alguma lâmina. Os tokens eram usados por correspondência, por exemplo, 2 jarros de óleo eram representados por 2 ovoides, 3 jarros de óleo representados por 3 ovoides e assim sucessivamente. A pesquisadora ainda coloca que não eram utilizados os mesmos símbolos para objetos diferentes. A substituição destes objetos físicos por sinais foi o primeiro passo para a escrita (ROQUE, 2012).

Conforme os milênios se passaram e as sociedades se formaram, novas necessidades surgiram e novos conceitos sobre o número surgiram. Uma forma curiosa de compreender o número é dada nos Elementos de Euclides onde os números *(arithmos)* e as grandezas *(mégéthos)* são tratados como segmentos de reta, embora os números sejam tidos como o agrupamento de unidades que não são divisíveis. Roque (2012, p.189), mostra as primeiras definições do livro VII onde podemos encontrar a noção de número e o papel da medida da seguinte forma:

> Definição VII-1 Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma.
>
> Definição VII-2 E número é a quantidade composta de unidades.
>
> Definição VII- 3 Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior.

Das definições apresentadas acima, podemos perceber que os gregos tinham a ideia de número associada à noção de medida, evidenciando um tratamento geométrico dos números que geralmente eram associados a segmentos de reta.

Já mais próximo do nosso século e após toda a evolução matemática, os estudos matemáticos se tornaram fundamentais para a sociedade moderna que estava se formando e novas formas de cálculo e de raciocínio eram necessárias. O surgimento de novos entes matemáticos é algo que causa certo fascínio nos estudiosos da área e que pode mudar completamente o rumo dos estudos e investigações neste ramo da ciência. Neste capítulo pretende-se estudar o surgimento de uma constante que, de fato, causou fascínio nos envolvidos em sua investigação, o número de Euler, representado pela letra e. Também é o objetivo deste capítulo compreender o contexto da época em que o número e começou a se tornar notório dentro da comunidade científica.

As aplicações, resultados e propriedades do número e revolucionaram a matemática e fez com que ele se tornasse uma das constantes mais importantes dessa área de estudo. Apresentaremos a seguir alguns contextos onde o número de Euler está relacionado.

1.1 O número e em problemas financeiros

Ao longo da história, os homens recorreram à matemática para lidar com os problemas cotidianos de seu tempo. O final da Idade Média foi um momento onde este fato ficou bem explícito, pois nessa época havia a necessidade de criar novas tecnologias a fim de que as demandas dos novos tempos fossem atendidas. A respeito das exigências que tais tempos pediam, Roque coloca:

> Desde o século XII eram necessários estudos práticos para dar conta das grandes transformações econômicas e sociais, como melhorias agrícolas e construção de catedrais. Aos poucos, a secularização das formas de vida forçaram o homem a se aproximar da esfera prática sem separá-la completamente da esfera intelectual. Nos séculos XIV e XV, importantes invenções ajudaram a transformar o papel da ciência, como o relógio mecânico, a bússola, a artilharia, as lunetas e, sobretudo a imprensa, que facilitou a circulação e divulgação dos saberes. (Roque, 2012, p. 295)

Na fala da autora percebemos que o desenvolvimento prático está bastante ligado com o desenvolvimento intelectual, e para que as novas tecnologias sejam eficientes na vida em sociedade, o desenvolvimento matemático é de fundamental importância. Ainda de acordo com Roque (2012) nos séculos XV e, principalmente, no XVI, o interesse pela matemática se intensificou entre artesãos e engenheiros que queriam resolver problemas cotidianos, seus estudos estavam focados em balística, bombas de água e outros temas de caráter prático.

No final do século XVI e início do século XVII ocorreu uma enorme expansão do conhecimento científico em todos os ramos da ciência, por consequência disso a mudança da percepção do mundo e do universo. Grandes marcos ocorriam nesse período, como a circunavegação do globo por Magalhães em 1521, a publicação do novo mapa do mundo por Gerhard Mercartor (1512-1594) em 1569, o estabelecimento das leis da ciência mecânica por Galileu Galilei (1564-1642), a formulação das leis do movimento planetário por Johannes Kepler(1571-1630). Todo esse desenvolvimento necessitava de uma quantidade de dados numéricos imensa e o processo de computar todos esses dados era um trabalho maçante (MAOR, 2004).

As consequências de tantos avanços ocorridos no final destes séculos são inúmeras. A circunavegação do globo proporcionou a exploração de todo o globo e transações financeiras passaram a se tornar elementos centrais para a época e o trabalho com juros recebeu um pouco mais de atenção e é no contexto da matemática financeira daquele tempo que o número de Euler possa ter sido notado pela primeira vez. No decorrer desta seção compreenderemos a relação entre os juros e o surgimento da matemática financeira (MAOR, 2004).

Desde os tempos mais remotos da humanidade, lidar com dinheiro é um desafio para o ser humano e o acúmulo de riquezas sempre esteve presente na relação do homem com o dinheiro. Ora, é de se pensar que algo tão próximo das atividades humanas tenha sido estudado e tratado com bastante afinco ao longo da história, o que de fato é verdade. De acordo com Maor (2004), o conceito de emprestar alguma quantidade de dinheiro e cobrar uma taxa sobre o valor emprestado recua até o início da história antiga. A taxa cobrada sobre uma certa quantidade de dinheiro que foi emprestada é chamada de juro, Neto (2017) define os juros como o preço pago pelo uso de certo capital por determinado período de tempo. Podemos ver um exemplo de problemas com juros em uma tábua de argila babilônica que, na linguagem atual, pode ser enunciado da seguinte forma: "quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente?”. Os babilônios eventualmente chegaram na resposta 3,7870 que é uma boa aproximação para o valor correto que é 3,8018 obtidos por meios modernos de cálculo. Podemos dizer que eles foram bem sucedidos na resolução deste problema uma vez que eles não estavam munidos dos artifícios da álgebra moderna (MAOR, 2004).

Conforme dito anteriormente, os juros são uma taxa cobrada sobre uma quantia de dinheiro e eles podem ser simples ou compostos. Neto (2017) explica o funcionamento dos juros compostos da seguinte forma: um determinado principal (capital) é aplicado à uma taxa de juros pré estabelecida, dessa forma ao final do período teremos um montante e sobre este montante aplica-se novamente a taxa de juros pelo período. Para ilustrar como funciona essa forma de trabalhar com juros, suponhamos que um capital de R\$ 200,00 seja aplicado à taxa de 10% ao ano. Desta forma, teremos ao final do primeiro ano $200+200\cdot 0,1 = R\$220,00$, ao final do segundo ano de aplicação teremos $220+220\cdot 0,1 = R\$242,00$, ao final do terceiro ano o montante será de $242+242\cdot 0,1 = R\$266,20$ e assim sucessivamente. Perceba que o montante (soma do capital com os juros) da aplicação anterior é o capital da seguinte. Para generalizar esse raciocínio, suponhamos que um capital C é aplicado à taxa r em regime de juros compostos anualmente. Desta forma, teremos no primeiro ano um montante dado pela equação

$$M = C + Cr = C(1+r)$$

Ao final do segundo ano obteremos:

$$M = C(1+r) + C(1+r)\cdot r = C(1+r)(1+r) = C(1+r)^2$$

, no terceiro anos obteremos:

$$M = C(1+r)2 + C(1+r) \cdot r = C(1+r)(1+r)(1+r) = C(1+r)^3$$

. Portanto ao final de t anos teremos:

$$M = C(1+r)^t \tag{1.1}$$

Entretanto, Maor (2004) explica que uma mesma aplicação pode ser composta mais de uma vez ao ano, desta forma se um capital for aplicado em um período de 6 meses então a taxa anual será dividida ao meio formando uma taxa por período. Então, se tivermos um capital de R$ 200,00 composto duas vezes com juros de 10% vamos ter $200 \cdot (1,05)^2 = 220,50$, que é R$0,50 a mais em comparação a composição do valor principal apenas em uma vez ao ano.

No meio bancário existem vários tipos de composição de juros - anual, semestral, trimestral, mensal, semanal e diário. Se a composição pode ser feita em n períodos do ano, então a taxa anual desses juros deve ser dividida por n e desta forma temos $\frac{r}{n}$. Mas como em t anos podem existir n períodos de conversão, a Equação (1.1) ficará da forma:

$$M = C \cdot (1 + r/n)^{n \cdot t} \tag{1.2}$$

Tendo esta nova equação, será bastante interessante comparar quanto renderá determinada quantia de dinheiro em um ano, porém em diferentes períodos de capitalização. Abaixo há uma tabela com a capitalização de um principal de R$50,00 que está sendo investido usando a taxa de juros anual de 10%.

Tabela 1 – R$ 50,00 investido no período de um ano com a taxa anual de 10% ao ano em diferentes períodos de conversão

Períodos de Conversão	n	r/n	M
Anual	1	0.1	R$ 55,00
Semestral	2	0.05	R$ 55,12
Trimestral	4	0.025	R$ 55,19
Mensal	12	0.00833	R$ 55,23
Semanal	52	0.001923	R$ 55,25
Diário	365	0.0002739	R$ 55,26

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Perceba que na tabela acima os valores dos rendimentos entre determinados períodos de conversão são praticamente desprezíveis, o que nos sugere que não existe uma diferença substancial entre alguns deles. Este resultado abre caminho para um problema interessante de juros compostos e que possui um resultado matemático intrigante e suas consequências matemáticas demandaram estudos longos e rigorosos para a sua total compreensão. Suponhamos

$r = 1$ isto é, que a taxa de juros sobre o capital seja de 100%. Deve-se observar que este problema é puramente hipotético. Para simplificar o que deve ser mostrado aqui vamos assumir uma aplicação de R$ 1,00 pelo período $t = 1$, ou seja, um ano. Desta forma obteremos a equação:

$$M = (1 + \frac{1}{n})^n \tag{1.3}$$

Agora veja o que acontece quando os valores de n crescem cada vez mais, ou seja, em um contexto financeiro isto é equivalente a dizer que os períodos de conversão estão aumentando.

Tabela 2 – Conversão em períodos

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	2.25
3	2.37037
4	2.44141
5	2.48832
10	2.59374
50	2.69159
100	2.70481
1,000	2.71692
10,000	2.71815
100,000	2.71827
1,000,000	2.71828
10,000,000	2.71828

Fonte: Maor (2004).

Ao observarmos a tabela 2 percebemos que, aparentemente, não importa o quanto n se torne grande, as mudanças no resultado final serão cada vez menos significativas. Hoje, já se sabe que $2,71828...$ representado pela letra e é justamente $(1 + 1/n)^n$ quando n cresce indefinidamente, ou seja, tende para o infinito, entretanto o momento exato do surgimento deste número permanece obscuro. Conforme dito no início do capítulo, no começo do século XVII com o aumento das atividades comerciais e consequentemente a maior atenção às leis dos juros compostos é possível que alguém tenha notado o comportamento da equação para o cálculo desses juros. É nesta mesma época que Napier começa a trabalhar com os logaritmos com o objetivo de facilitar os cálculos que, naquela época, eram trabalhosos de fazer e eram de fundamental importância para várias áreas que estavam avançando naquele momento da história. Os logaritmos de Napier estão ligados ao número de Euler, por conta da forma como foram construídos, como veremos na próxima seção.

Veremos que o número de Euler não aparece somente em questões financeiras, durante a história podemos ver problemas em que este curioso número surge como importante peça na resolução de questões que outrora não eram possíveis de serem encontradas sem determinados artifícios. Essas outras aparições do número e serão estudadas mais adiante neste trabalho (MAOR, 2004).

1.2 O número de Euler e a invenção dos logaritmos de Napier

Durante o desenvolvimento matemático através dos séculos, houveram grandes pensadores que conseguiram criar artifícios capazes de resolver problemas complicados ou então facilitar a computação de dados que antes eram difíceis e muito demorados de fazer. Então é natural pensar que em dado momento, alguém já se pegou pensando no que era possível fazer para resolver tal problema de computação de dados. Uma das soluções encontradas foi a criação dos logaritmos pelo até então improvável ativista religioso John Napier(1550-1617) (MAOR, 2004).

Os logaritmos surgiram no final do século XV e início do século XVI e nessa época avanços tecnológicos de todos os tipos estavam se proliferando e a exploração do mundo estava em seu auge. Entretanto, para que tais avanços acontecessem era necessária a computação de inúmeros dados numéricos, o que era desgastante e um tanto quanto complicado. Na verdade, já existiam artifícios para que os cálculos fossem facilitados, chamados de regras prostafaréticas e sua importância consiste no fato de que o produto de duas expressões pode ser transformado em soma. Um exemplo dessas regras é: sen $A \cdot senB = 1/2 \cdot [cos(A-B) - cos(A+B)]$. Como é mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir, essas regras tinham grande importância no cenário da época. Já se conhecia, muito antes da época de Napier, a relação que havia entre os termos de uma progressão geométrica e os seus expoentes. Foi o matemático alemão Michael Stifel (1487-1567) em seu trabalho chamado *Arithmetica integra* (1544) que formulou que o produto entre os termos de uma progressão geométrica é equivalente a somar os seus expoentes. Por exemplo se quisermos obter $q^3 \cdot q^4$ então teremos $(q \cdot q \cdot q) \cdot (q \cdot q \cdot q \cdot q) = q^7$ que poderíamos encontrar se somássemos os expoentes. Note que esse procedimento reduz o produto em soma. Se caso os expoentes fossem negativos, então teríamos $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$ e, deste modo, podemos escrever que $\frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$ o que reduz a divisão em subtração. Esta pode ter sido a ideia-chave que inspirou John Napier a criar os logaritmos (MAOR, 2004).

A ideia que Napier tinha era a seguinte: escrever qualquer número positivo, como potência de um dado número fixo. Com isso, as operações de soma e divisão estariam reduzidas respectivamente à soma e subtração e as operações de potenciação e de radiciação estariam reduzidas à multiplicação e a divisão, respectivamente. Perceba que cada operação matemática estava reduzida à que estava abaixo na hierarquia de complexidade das operações, o que era bastante interessante para a época (MAOR, 2004).

Napier levou vinte anos para a construção de sua obra (1594-1614) e seu trabalho foi recebido com muito entusiasmo pela comunidade científica da época. Ele demorou bastante tempo para escolher uma base conveniente para trabalhar, isso porque ela precisava ser suficientemente pequena para que suas potências crescessem em um ritmo satisfatório, mas não muito devagar. Após anos de estudo ele se decidiu por $0,9999999 = 1 - 10^{-7}$. Essa opção de base, como chamamos hoje, se deu pelo fato de que Napier queria evitar o uso de frações decimais que não eram muito usuais na Europa naquele tempo (MAOR, 2004).

Após a escolha da base, ele partiu para a fase de fazer subtrações sucessivas para formar a sua progressão. A primeira tabela de Napier tinha 101 elementos e o primeiro era 10^7 seguido de $10^7(1-10^{-7}) = 9.999.999$ seguido de $10^7(1-10^{-7})^2 = 9.999.998$ até chegar em $10^7(1-10^{-7})^{100} = 9.999.900$. Em notação moderna, a definição de logaritmo feita por Napier é equivalente a $N = 10^7(1-10^{-7})^L$ em que L é o logaritmo Neperiano de N. Os logaritmos de Napier diferem em vários aspectos da definição que foi introduzida por Leonhard Euler em 1728 e que é a utilizada até os dias de hoje. Um desses aspectos é o fato de que se L é zero, então teremos que $log_{Nap}10^7 = 0$ enquanto no sistema moderno teríamos $log_a 1 = 0$. No sistema de Napier, regras de operações com logaritmos, como por exemplo, o logaritmo de um produto é a soma dos logaritmos individuais, não são válidas (MAOR, 2004).

A relação dos logaritmos de Napier com o número e está na sua definição. Como eles são definidos como $N = 10^7(1-10^{-7})^L$ se dividirmos N e L por 10^7, efetuando os cálculos devidos teremos $N' = [(1-10^{-7})^{10^7}]^{L'}]$ tendo $N' = N/10^7$ e $L' = L/10^7$. Observando $N' = [(1-1/10^7)^{10^7}$ que é um número bastante próximo de $1/e$. Assim, podemos dizer que os logaritmos de Napier são de base $1/e$ (MAOR, 2004).

É curioso notar que a relação que existe entre o número de Euler e os logaritmos parece uma coincidência. Talvez se ele tivesse escolhido outra base, ou "proporção" nas palavras de Napier, não existiria essa relação. Entretanto, esse número surge naturalmente na construção dos logaritmos neperianos.

1.3 Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707- 1783) nasceu na Basileia, filho de Paul Euler, um clérigo que desejava que seu filho seguisse a mesma carreira. Mas Paul também possuía dotes matemáticos e estudou esse assunto com Jakob Bernoulli [1] e acabou convencido por Johann, irmão de Jakob e que ensinou matemática ao jovem Euler, deixar seu filho Leonhard a seguir sua prórpia vocação (MAOR, 2004).

De fato, Euler foi uma das mentes matemáticas mais brilhantes que já existiu. O próprio Jean Bernoulli se referia a Euler como "incomparável príncipe da Matemática" e as suas

[1] Jakob Bernoulli nasceu na Basileia no ano de 1654 e formou-se em filosofia em 1671 na Universidade da Basileia. Entretanto, seguiu carreira estudando matemática, astronomia e física. Jakob tinha um irmão chamado Johannes e juntos aprenderam o então recente Cálculo e depois passaram a ensiná-lo até mesmo para matemáticos importantes, mas conforme a fama dos irmãos crescia, suas disputas também aumentavam, fazendo com que a relação entre eles não fosse das melhores. A família Bernoulli produziu grandes matemáticos por mais de um século.

contribuições são inúmeras. A ele é atribuído um grande número as notações $f(x)$, i π r e que são usadas até hoje. Arruda (2007) menciona que Euler publicou mais de 800 artigos ao longo de sua vida em inúmeros ramos da ciência.

A capacidade imaginativa de Euler era impressionante e mesmo quando perdeu completamente a visão, sua produção cientifica não parou. Euler foi o responsável por elevar a teoria dos números de uma recreação matemática para a mais respeitada área de pesquisa matemática. Euler também é tido como um dos fundadores da topologia, que naquela época era conhecida como análise de posição (MAOR, 2004).

O mais influente trabalho de Euler, intitulado *Introductio in analysin infinitorum* publicado em dois volumes em 1748 é considerado o alicerce da moderna análise matemática. Foi nesse trabalho onde Euler, pela primeira vez, chama a atenção para o papel do número e e da função e^x na análise. Embora tenha sido na sua *Introductio* que o número e tenha sido abordado de forma mais rigorosa, Euler já tinha utilizado o símbolo e para representar o número $2,71828...$ em um de seus primeiros trabalhos, escrito em 1727 intitulado "Meditação sobre Experimentos feitos recentemente sobre o disparo do Canhão", embora esse escrito só tenha sido publicado em 1862, depois de seu falecimento. Em uma carta escrita em 1731 o número e aparece ligado a uma determinada equação diferencial em que Euler o define como "O número cujo logaritmo hiperbólico é igual a 1"(Maor, 2004, p. 203). Desta forma, observamos que esse número aparece de maneira informal em alguns trabalhos e somente com a *Introductio* de Euler ele é estudado de maneira mais rigorosa.

Embora o número $2,71828...$ tenha aparecido em cartas e documentos mais antigos, a primeira aparição desse número, sendo de fato aplicado, foi em um livro publicado foi em 1736 chamado *Mechanica de Euler*. Perceba que o uso desta constante ocorre antes mesmo de haver estudos rigorosos a seu respeito. Desde então, e já com o auxílio de ferramentas mais arrojadas da matemática, algumas relações com essa constante começaram a surgir tais como: Newton deduziu e^x e e^{-x} usando o desenvolvimento binomial, Leibniz obteve as séries e^x e e^{-x} por integração. Euler também conseguiu obter algumas aproximações das relações: $\frac{1}{e^x}$, $\frac{(e+1)}{(e-1)}$, $\frac{(e^2-1)}{2}$ e $\sqrt{e}$. Ele também usou a expressão $x = (1+\frac{x}{n})^n$ com os valores de n tendendo para o infinito para obter uma aproximação de e com a precisão de 23 casas decimais (ARRUDA, 2007).

De acordo com (MAOR, 2004), na época de Leonhard Euler os estudos na área do Cálculo já estavam mais sofisticados, desta forma análises matemáticas mais rebuscadas já eram possíveis, embora naquele momento, os processos infinitos não eram feitos com tanto rigor, o que eventualmente poderia produzir algum equívoco. Mas mesmo assim, os trabalhos de Euler resistiram ao rigor dos testes feitos por matemáticos mais modernos que revisitaram suas obras, e as obras de outros como Newton e Leibniz, provando que suas conclusões estavam corretas acerca de suas descobertas no campo matemático. Naquele tempo, havia um conceito intuitivo do que era o número e, mas foram os estudos de Euler que deram consistência a essa constante, o que propiciou a aplicação desse número em várias áreas do conhecimento fazendo com que a sua "possível existência" tenha se tornado relevante, do ponto de vista matemático, naquela época. Euler conseguiu determinar o valor da constante e utilizando o desenvolvimento binomial de Newton e mostrou que $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$

Podemos perceber até aqui que o número de Euler aparece em contextos que até então não estavam relacionados diretamente, como os logaritmos e problemas com juros, o que nos mostra que este número tem grande versatilidade e que para compreendê-lo melhor, a aplicação de ferramentas mais elaboradas da matemática como o Cálculo e a Análise se faz fundamental. No capítulo seguinte estudaremos tópicos inerentes a natureza do e, bem como demonstrar a sua existência.

2 A NATUREZA DO NÚMERO DE EULER

No capítulo anterior percebemos que o número e era um mistério para os matemáticos e estudiosos da época. Como ainda não havia artifícios matemáticos suficientemente avançados para compreender o comportamento de expressões no infinito, não era possível assegurar a existência ou outros aspectos relacionados a esse número até que Euler fornecesse uma aproximação utilizando a expansão binomial para a expressão $(1+\frac{1}{n})^n$. Mas, conforme os avanços na área de Cálculo progrediam, tornou-se possível compreender de fato o que era o número e. Outros aspectos inerentes a ele que serão apresentados neste capítulo.

Antes de iniciar os estudos a respeito da natureza e do comportamento da expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ é necessário enunciar a seguinte definição e o seguinte teorema, ambos apresentados por Thomas, Weir e Hass (2012)

Definição 2.1. *Uma sequência a_n é crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n. . A sequência é decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$. A sequência a_n é monotônica se for crescente ou decrescente.*

Teorema 2.1. *Se uma sequência a_n é limitada e monotônica, então a sequência converge.*

2.1 O Número de Euler como Limite

Ao analisarmos a expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ pensando nos valores que ela pode assumir para valores cada vez maiores de n , podemos chegar em duas conclusões diferentes, mas ambas erradas. Um dos raciocínios pode nos fazer pensar que $(1+\frac{1}{n})^n$ tende para 1 quando os valores de n se tornam cada vez maiores porque a parcela $\frac{1}{n}$ se aproxima de 0 com o crescimento de n. Desta forma, teríamos o 1 elevado à uma potência bastante grande, que resultaria em 1. Outra forma de pensar no comportamento de $(1+\frac{1}{n})^n$ é que os valores assumidos por essa sentença serão sempre maiores do que 1, embora a diferença seja mínima, e dessa forma como os valores de n tendem ao infinito, a expressão também tenderá para o infinito.

Como dito anteriormente, as duas formas para tratar $(1+\frac{1}{n})^n$ quando n cresce indefinidamente estão erradas, como veremos mais adiante. No capítulo passado, observamos que a expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ parece chegar próxima do número 2,71828. . . Entretanto, trabalhamos com uma quantidade limitada de termos, não permitindo para afirmar que em algum momento ela ultrapasse esse valor, ainda que isso ocorra em números indescritivelmente grandes, ou seja, não conseguimos garantir seu comportamento no infinito. Desse modo, faz-se necessário o estudo mais aprofundado desta sentença porque só dessa forma poderemos verificar pontos importantes tais como a garantia da existência desse número, uma forma de estimá-lo com mais precisão, entre outros. Os processos que serão apresentados aqui podem ser consultados em livros de Cálculo. O primeiro passo para estudar $(1+\frac{1}{n})^n$ para valores crescentes de n é fazer a expansão binomial obtendo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\cdot 1^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$+\binom{n}{3}\cdot 1^{n-3}\cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + ... + \binom{n}{n}\cdot 1^0\cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Desenvolvendo as combinações da igualdade acima obtem-se:

$$\frac{n!}{0!\cdot(n-0)!}\cdot 1^n\cdot 1 + \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + ... + \frac{n!}{n!\cdot 0!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

.

Efetuando o desenvolvimento desses fatoriais teremos:

$$1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+...+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Fazendo as devidas simplificações da equação acima concluímos que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})}{3!}+...+\frac{1}{n^n}$$

Agora já temos condições de estudar o comportamento da expressão acima quando os valores de n crescem indefinidamente, e isso será feito aplicando limite com n tendendo para o infinito. Sendo assim, teremos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1+\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})}{3!}+...+\frac{1}{n^n}\right)$$

Observando o lado direito da igualdade acima, observamos que os termos $-\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, $-\frac{2}{n}$,... tendem para zero pois n está tendendo ao infinito, portanto após aplicarmos o limite concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...$$

Perceba agora que a soma acima é infinita, o que nos leva a pensar que ela crescerá cada vez mais conforme mais termos são adicionados a ela. Nesse caso precisamos verificar a existência desse limite, isto é, se esse somatório tende ao infinito ou se ela converge para algum número. Para fazer isso, vamos utilizar o teorema (2.1) e mostrar que a sequência $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ é crescente e limitada. Uma vez demonstrado isso podemos afirmar que a expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ converge para um valor, que aqui chamaremos convenientemente de e.

2.1.1 A existência do limite

Primeiro vamos demonstrar que a sequência $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ é crescente, para isso considere

Para provar que a sequência x_n é crescente, considere

$$x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n^2}\right)+\binom{n}{3}\cdot\left(\frac{1}{n^3}\right)+\ldots+\binom{n}{n}\cdot\left(\frac{1}{n^n}\right)$$

Então

$$x_{n+1} = 1+1+\binom{n+1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}+\binom{n+1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)^n}$$

Vamos dividir $\binom{n+1}{k}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}$ por $\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{n^k}$ e teremos então

$$\frac{\binom{n+1}{k}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}}{\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{n^k}} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}}$$

$$\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}\cdot\frac{k!\cdot(n-k)!}{n!}\cdot n^k$$

$$\frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1-k)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}\cdot\frac{(n-k)!\cdot n^k}{n!}$$

Fazendo as devidas simplificações obteremos

$$\frac{n^k}{(n+1-k)\cdot(n+1)^{k-1}}$$

Para provar que a sequência é crescente, basta mostrar que a divisão apresentada acima é maior que 1. Para provar isso vamos recorrer ao método de indução iniciando com $k=2$. Para $k=2$ teremos

$$\frac{n^2}{(n+1-2)\cdot(n+1)} = \frac{n^2}{n^2-1}$$

que é seguramente maior que 1, portanto

$\frac{n^k}{(n+1-k)\cdot(n+1)^{k-1}} > 1$ está provado para $k=2$

Suponha que seja verdade para k, vamos verificar para $k+1$

$$\frac{n^{k+1}}{(n+1-k-1)\cdot(n+1)^{k+1-1}} = \frac{n^{k+1}}{(n-k)\cdot(n+1)^k}$$

Podemos escrever o lado direito da igualdade acima como

$$\frac{n^k\cdot n}{(n-k)^{k-1}\cdot(n+1)^k\cdot(n-k)}$$

Fazendo algumas manipulações na hipótese de indução $\frac{n^k\cdot n}{n-k} > n+1-k$ e daí segue

$$\frac{n^k\cdot n}{(n-k)^{k-1}\cdot(n+1)^k\cdot(n-k)} > \frac{(n+1-k)\cdot n}{(n+1)\cdot(n-k)}$$

Aplicando a propriedade distributiva no lado direito da desigualdade e colocando o fator n em evidência obtemos

$$\frac{n^2+n-kn}{n^2-kn+n-k} = \frac{n^2+(1-k)\cdot n}{n^2+(1-k)\cdot n-k} > 1$$

A desigualdade acima mostra que a sequência $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ é crescente.

Para demonstrar que x_n é limitada, considere

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = \binom{n}{0}\cdot 1^n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=2}^{n}\cdot\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Repare que as duas primeiras parcelas do somatório acima são 1 dessa forma podemos escrever:

$$x_n = 1+1+\sum_{k}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot(\frac{1}{n^k}) > 2$$

.

Logo $x_n \geq 2$.

Agora provemos que $x_n < 3$ para tanto, considere a igualdade

$$\binom{k}{n}\cdot\left(\frac{1}{n^k}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

.

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{k!}$$

.

Mas $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} < 1$ o que nos permite concluir que

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{k!} < \frac{1}{k!}$$

.

Voltando a sequência temos

$$1+1+\sum_{k}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n^k}\right) = 1+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} \leq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

.

Antes de continuar com a demonstração de que a sequencia x_n é limitada, deveremos provar o fato de que $2^{n-1} \leq n!\forall n \geq 1$ porque, mais adiante, o utilizaremos para concluir a demonstração inicial, que é o objetivo deste tópico. Para provar que $2^{n-1} \leq n!$ novamente recorreremos ao método de indução, desta forma vem:

Para $n = 1 : 2^0 \leq 1$. Desta forma, vale para $n = 1$. Agora, tendo $2^{n-1} \leq n!$ por hipótese de indução, suponha verdade para n vamos provar para $n+1$, então:

$$2^{n+1-1} \leq (n+1)! \Rightarrow 2^{n-1}\cdot 2 \leq n!(n+1)$$

Da hipótese de indução, temos que $2^{n-1} \leq (n+1)!$ e $2 \leq (n+1)$ para $n \geq 1$ logo podemos concluir que $2^{n+1-n} \leq (n+1)!$. Provando assim que

$$2^{n-1} \leq n!\forall n \geq 1$$

Note que se $2^{n-1} \leq n!$ então $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Voltando a sequência temos então que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

. Temos que a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ é a soma da Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e com o termo inicial $a_1 = \frac{1}{2}$. Logo a soma S dessa Progressão Geométrica será dada por:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Concluímos então que $x_n \leq 1+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} = 1+1+1=3$. Logo $2 \leq x_n \leq 3$, portanto a sequência é limitada.

Como x_n é uma sequência crescente e limitada, então ela é convergente. Assim, definimos $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

2.2 A Irracionalidade do Número de Euler

Apresentaremos neste tópico a demonstração da irracionalidade do número e baseada em Figueiredo (2002)

O número e pode ser escrito como

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... \tag{2.1}$$

e vamos demonstrar utilizando o método de redução ao absurdo que este é um número irracional. Primeiramente, suponha que e pode ser escrito em forma de fração $\frac{p}{q}$ em que $p,q \in \mathbb{N}$ são primos entre si. De (2.1) segue-se que

$$\frac{p}{q} - (1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!}) = \sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

Desta forma, temos que:

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+... \Rightarrow \frac{1}{(q+1)\cdot q!}+\frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)\cdot q!}+...$$

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{q!}\cdot(\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)}+...)$$

Perceba que

$$\frac{1}{q!}\cdot(\frac{1}{(q+1)+\frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)}+...}) < \frac{1}{q!}\cdot(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+...)$$

A expressão $(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+...)$ é uma Série Geométrica cuja razão está entre 0 e 1, isto é, $0<r<1$ e, neste caso, $r=\frac{1}{q+1}$ e a sua soma será:

$$S_n = \frac{r}{1-r} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}}$$

.

$$S = \frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q+1-1}{q+1}} \Rightarrow \frac{1}{q+1} \cdot \frac{q+1}{q} = \frac{1}{q}$$

.

Assim concluímos que a soma infinita $(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + ...) = \frac{1}{q}$. Portanto, temos que:

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}$$

É claro que $0 < \frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!})$. Desta forma

$$0 < \frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}) < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}$$

Que pode ser escrita da seguinte forma

$$0 < (\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - ... - \frac{1}{q!}) < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}$$

Multiplicando os termos da expressão acima por $q!$ teremos:

$$0 < q! \cdot (\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - ... - \frac{1}{q!}) < \frac{1}{q}$$

.

Observe que $q!$ cancela todos os denominadores presentes nas frações da expressão, o que é impossível, pois, sendo: $\frac{1}{q} \leq 1$ a expressão nos diria que o termo do meio é um número inteiro, estritamente positivo e menor que 1. Este absurdo provém da hipótese inicial de dizer que e é um número racional. Concluímos desta maneira que e é um número irracional.

2.3 A Transcendência do Número de Euler

Um fato bastante interessante a respeito da natureza do número de Euler é que esta constante é um número transcendente, isto é, ele não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. À primeira vista essa informação pode parecer matematicamente radical, de certa forma. De fato, a existência de números que não podem ser raiz de polinômios com coeficientes inteiros causou certa fascinação nos matemáticos do século XIX. Vejamos a seguir algumas definições importantes para a compreensão deste tópico que estão de acordo com (RIPOLL; RIPOLL; SILVEIRA, 2011)

Definição 2.2. *Um número real é dito algébrico se ele for raiz de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros:*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 + a_0 = 0; a_i \in \mathbb{Z}$$

Definição 2.3. *Um número β é chamado transcendente se não é algébrico.*

Também se faz necessário apresentar o Teorema do Valor Médio, que Guidorizzi (2001) enuncia da seguinte forma

Teorema 2.2. *Se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existirá pelo menos um c em $]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{ ou } f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

De acordo com Ripoll, Ripoll e Silveira (2011), o primeiro matemático a imaginar a existência dos números transcendentes foi Leonhard Euler. Ele conjecturou que os números $\log \pi$, e, π pertenceriam a esta classificação de números. Já na época de Euler sabia-se que e e π não eram raízes de polinômios de grau 2, entretanto ele não conseguiu demonstrar esse fato para polinômios de grau n com coeficientes inteiros e nem demonstrar que existiam números transcendentes. Somente em 1844 Joseph Lioville (1809-1882) conseguiu provar que números transcendentes existiam.

Aproximadamente por duas décadas os trabalhos da área de Teoria de Números Transcendentes não tiveram grandes contribuições, até que em 1873 o matemático francês Charles Hermite (1822-1901), em seus estudos a respeito de funções algébricas contínuas, conseguiu estabelecer a transcendência do número e. Esse fato foi importante para a comunidade matemática da época porque revelava mais um aspecto da natureza de uma constante que já era familiar a comunidade científica e também pelo método empregado na demonstração. Entretanto a forma que Hermite usou para provar tal fato, foi modificada ao longo da história e do desenvolvimento da matemática (FURTADO, 1996).

Vejamos agora, a construção que permite demonstrar que o número e é transcendente. Uma demonstração detalhada pode ser encontrada no trabalho de Vasconcelos (2013) .

Seja $P(x)$ um polinômio de grau r. Defina a função

$$F(x) = P(x) + P'(x) + ... + P^r(x) \tag{2.2}$$

onde $P^r(x)$ é a derivada de ordem r de P.

Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $e^{-x}F(x)$ no intervalo $[0,k]$ obtemos

$$F(k) - e^k F(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k) \tag{2.3}$$

para todo k > 0 onde θ_k é um número compreendido entre 0 e 1.

Considere agora $\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$ vamos supor que e seja algébrico, isto é, existem números inteiros $c_0, c_1, ...c_n$ tais que:

$$c_n e^n + ... + c_1 e + c_0 = 0 \tag{2.4}$$

Da igualdade (2.4) concluímos que

$$c_0 = -c_n e^n - ... - c_1 e$$

Multiplicando (2.5) acima por $F(0)$ obteremos:

$$c_0 F(0) = -c_n e^n F(0) - ... - c_1 e F(0)$$

.

Como $\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$ podemos escrever devido a (2.3) a seguinte igualdade:

$$\varepsilon_k - F(k) = -e^k F(0)$$

assim têm-se

$$c_0 F(0) = c_n[\varepsilon_k - F(k)] + ... + c_1[\varepsilon_1 - F(1)]$$

Aplicando a propriedade distributiva no lado direito da equação acima e reorganizando os termos, obtemos:

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + ... + c_n F(k) = c_1 \varepsilon_1 + ... + c_n \varepsilon_n \tag{2.5}$$

Considere o seguinte polinômio:

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p ... (n-x)^p \tag{2.6}$$

sendo p um número primo tal que $p > n$ e $p > c_0$ onde n e c_0 são dados em (2.4). A ideia da sequência de fatos apresentados aqui é a de mostrar que para tal polinômio P, o lado esquerdo de (2.5) é um inteiro que não é divisível por p enquanto o lado direito é estritamente menor que 1 em valor absoluto. Desta forma, teremos um absurdo.

Seja

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j \tag{2.7}$$

com coeficientes inteiros, e seja $p < r$ demonstra-se que

$$Q^i(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i} \tag{2.8}$$

e $i \geq p$

Temos ainda que:

$$\frac{1}{(p-1)!} Q^i(x)$$

é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.

Desenvolvendo o produto do polinômio $P(x)$ em (2.6) obtemos:

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!}x^p + ... \tag{2.9}$$

Nota-se ainda a respeito do polinômio $P(x)$ em (2.6) que suas raízes são $1,...n$ logo

$$P^i(k) = 0$$

para $k = 1,...,n$ com $i < p$

De (2.9) verifica-se que $P^{p-1}(0) = (n!)^p$ e $P^i(0) = 0$, $i < p-1$

Assim, de (2.9) e sabendo que $P^i(k) = 0$ conclui-se que $F(k)$ para $k = 1,...,n$ é um inteiro divisível por p. Também temos $F(0)$ um inteiro que não é divisível por p

Dos ε_k definidos anteriormente, como $\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$ demonstra-se que, para o polinômio $P(x)$ sua forma será:

$$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)\frac{1}{(p-1)!}(k\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p...(n-k\theta_k)^p. \tag{2.10}$$

Usando desse fato e de que θ_k é um número entre 0 e 1 verifica-se a relação:

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{e^p n^p (n!)^p}{(p-1)!}; k \leq n. \tag{2.11}$$

Tomando p suficientemente grande e tendo $k = 1,...n$ na desigualdade anterior é verdade que

$$|c_1\varepsilon_1 + ... + c_n\varepsilon_| < 1$$

Desta construção, verifica-se que $c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n) = c_1\varepsilon_1 + ... + c_n\varepsilon_n$ Mas observa-se que $c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n)$é um inteiro não divisível por p e $c_1\varepsilon_1 + ... + c_n\varepsilon_n < 1$, por (2.11). Mas a conclusão em que se chegou não é possível, pois o módulo de um número inteiro não nulo é sempre maior que 1. O absurdo provém de supor que e seja um número algébrico.

Com o que foi exposto neste capítulo percebe-se que a natureza do número e foi compreendida através de ferramentas e métodos matemáticos mais avançados. Fatos, como a irracionalidade e a transcendência, a respeito de alguns números além do e, só puderam ser verificados quando áreas como Cálculo e Análise estivam consolidadas.

Antes do advento do Cálculo, por exemplo, não era possível assegurar sequer a existência de e, e com os avanços nessa área foi possível não apenas provar sua existência, mas aplicá-lo em diversos contextos e, dessa forma, ocupando espaço de grande importância para os estudos e aplicações do Cálculo. Veremos no capítulo seguinte exemplos e situações onde a constante e tem grande relevância e surge de forma quase natural, assim contribuindo para o desenvolvimento de diversos ramos da ciência em geral.

3 APLICAÇÕES, RESULTADOS E FÓRMULAS QUE ENVOLVEM O NÚMERO DE EULER

Vimos até agora fatos a respeito da história e da natureza do número e. No decorrer dos séculos, esse número surge de forma quase natural em equações que demandaram o trabalho de grandes matemáticos para serem definidas e aplicadas. De acordo com Talavera (2008) o cálculo foi moldado no século XVII, em um momento em que problemas a respeito de curvas eram abordados de forma geométrica. Neste capítulo veremos algumas curvas que foram trabalhadas do ponto de vista analítico graças ao Cálculo, são elas a equação da catenária e a espiral logarítmica. Abordaremos também a identidade de Euler, considerada a equação mais bonita da matemática. Estudaremos ainda o fato da função exponencial e^x ser igual à sua própria derivada.

3.1 A Catenária

O problema da catenária foi inicialmente proposto por Jakob Bernoulli no ano de 1690 em um jornal fundado por Leibniz, conhecido como *Acta eruditorum* em que era enunciado da seguinte forma "E agora vamos propor este problema: encontrar a curva formada por um fio pendente livremente suspenso a partir de dois pontos fixos."Jakob presumiu que o fio fosse flexível em todas as partes e com espessura constante (MAOR, 2004).

De acordo com Maor (2004), o problema de encontrar uma expressão para tal curva chamou atenção de outros estudiosos, como Galileu (1564-1695), que acreditava que a catenária era na verdade uma parábola. Entretanto, foi um prolífico cientista chamado Christian Huyges (1629-1695) que conseguiu demonstrar em 1646, com apenas dezessete anos de idade, que as duas curvas eram diferentes.

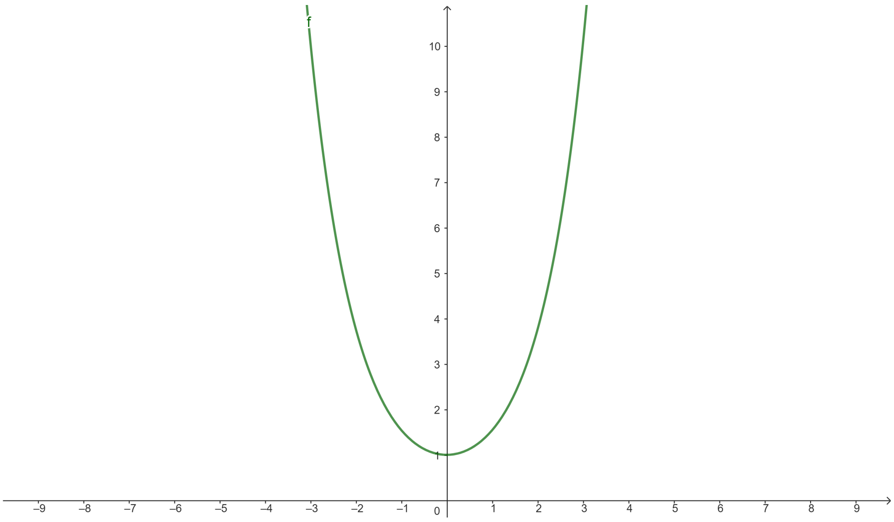
Um ano após a publicação do problema proposto por Jakob Bernoulli, o jornal *Acta eruditorum* publicou três respostas, ambas corretas, que solucionavam a questão. As respostas foram enviadas por Leibniz, Johann Bernoulli e por Huyges, que já estava com sessenta e dois anos de idade.

A equação da catenária, em notação moderna, é

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$$

sendo que a é uma constante que dependerá dos parâmetros físicos da corrente (sua densidade linear). A descoberta dessa equação foi considerado um grande triunfo para o cálculo diferencial, uma vez que foi através dele que foi possível encontrá-la (MAOR, 2004).

Figura 3.1 – Curva da Catenária definida pela equação $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

A representação da catenária no plano cartesiano é mostrada na figura (3.1). Neste exemplo, tomamos $a = 1$

Maor (2004) destaca que quando a equação da catenária foi definida, o número de Euler ainda não tinha um símbolo específico e a função exponencial não era sequer considerada uma função independente, mas era vista apenas como a inversa da função logarítmica. A equação da catenária era simplesmente subentendida pela forma que foi construída. Podemos notar que o número e surge nesse problema de forma natural, como na base dos logaritmos de Napier que eram de base $\frac{1}{e}$.

A curva da catenária é amplamente aplicada na arquitetura. É possível observá-la em grandes construções como, por exemplo, no Gateway Arch (Arco do Portal) e no Dulles International Airport, maior aeroporto construído entre os anos 1958-1962, tem o telhado a forma de catenária. O arquiteto responsável, Eero Saarinem (1910-1961) explica que o formato garante proteção contra alguns efeitos do vento, garante flexibilidade, estabilidade e tem uma boa acústica. Ela também é bastante aplicada na construção de arcos que se sustentam no próprio peso, pois sua forma garante maior estabilidade para a construção. Ambas as construções estão localizadas nos Estados Unidos (TALAVERA, 2008).

No dia a dia, ainda podemos ver a presença dessa curva em fios de alta tensão, em correntes que organizam filas, mas também a vemos na natureza

> “Encontra-se a catenária especialmente no perfil do ovo; as meridianas das duas calotes (uma obtusa e outra em ponta) que se observam no ovo são catenárias de comprimentos diversos” (Roxo, Thiré, Mello e Souza, Talaveira, 2008, p. 76, apud).

Desta forma, percebemos que esta é uma curva de grande utilidade para o homem e é uma forma que está presente na natureza devido a sua estabilidade e demais propriedades práticas. A presença da constante e na sua equação evidencia a beleza matemática por trás deste número.

3.2 A Identidade de Euler

A vida acadêmica de Leonhard Euler (1707-1783) foi extremamente produtiva. Mesmo perdendo a visão completamente durante sua estadia na Rússia, seu trabalho não foi em nada afetado ou comprometido, pois ele continuava suas pesquisas matemáticas como antes.

Em seu trabalho intitulado *Introductio in analysin infinitorum* Euler define a função exponencial e^x e a função $ln(x)$ de forma independente. Isto porque naquela época a função exponencial era vista apenas como a função inversa da logarítmica. Euler as colocou em uma base igual e as definiu da seguinte forma:

$$e^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{3.1}$$

$$ln(x) = \lim_{n\to\infty}(x^{\frac{1}{n}}-1) \tag{3.2}$$

Embora os limites acima indiquem que há um crescimento cada vez maior das variáveis, os processos infinitos no tempo de Euler não eram tratados de forma rigorosa (MAOR, 2004).

(MAOR, 2004) menciona que Euler tinha uma habilidade matemática imensa e que conseguia manipular e brincar com fórmulas matemáticas como uma criança brinca com seus brinquedos. Em um dado momento Euler fez algo bastante atrevido para a sua época, ao substituir por ix,onde $i=\sqrt{-1}$ os valores, que até então eram apenas reais, na expressão

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$$

.

Os resultados obtidos por Euler tornando os valores de x complexos foram surpreendentes pois ele conseguiu chegar na equação $e^{ix}=cos(x)+isen(x)$ que relaciona a trigonometria elementar com os números complexos. Para melhor compreensão deste processo veremos a seguir as definições de Série de Potência e os critérios para sua convergência e também teremos a definição de Série de Taylor.

De acordo com Thomas, Weir e Hass (2012) uma série de potência é definida da seguinte forma

Definição 3.1. *Uma série de potências centrada em $x=0$ é uma série do tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x^1 + c_2x^2 + ... + c_nx^n + ...$$

.

Uma série de potência centrada em $x = a$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ...$$

no qual o centro a e os coeficientes c_0, c_1, c_2,..., c_n são constantes.

As Séries de Potência podem convergir em três casos que são:

1. A série converge $\forall x$;
2. A série converge em $x = a$ e diverge em todos os outros pontos;
3. A série pode convergir absolutamente para x com $|x-a| < R$. Sendo R chamado de raio de convergência

De acordo com Thomas, Weir e Hass (2012) uma Série de Taylor é definida da seguinte forma

Definição 3.2. *Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então a Série de Taylor gerada por f em $x = a$ é*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$

.

Sendo que $f^(k)$ é a derivada de ordem k da função e os coeficientes são os valores das derivadas de f no ponto. Observe que a Série de Taylor também é uma Série de Potência, desde que esteja definida em um domínio, chamado de intervalo de convergência, no qual a série converge. Na verdade, ela nos permite representar uma função f qualquer em forma de Série de Potência.

Agora com essas duas definições, vejamos como expressar e^x no formato da Série de Taylor. Para que seja mais fácil, vamos admitir que ela esteja centrada em 0, ou seja $x = 0$. Temos que a derivada de ordem k de f será $f^{(k)} = e^x$. Assim obtemos:

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$
$$c_k = \frac{f^{(k)(0)}}{k!} = \frac{1}{k!}$$

Desta forma, escrevemos:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Esta é a forma em Série de Potência da função e^x. Para verificarmos sua convergência basta aplicar o teste da razão que nos dará

$$\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^k}\right| \Longrightarrow \frac{|x|}{k+1}$$

Podemos observar que conforme os valores de k tendem ao infinito, a expressão tende para zero, assim conclui-se que $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ converge para qualquer valor de x.

Consideremos a função $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = cos(x)$, vejamos primeiramente a expansão em Série de Potência de $g(x)$ novamente tomando $x = 0$. O primeiro passo é calcular as derivadas da função, obtendo:

$$g^{'}(x) = cos(x)$$
$$g^{''}(x) = -sen(x)$$
$$g^{'''}(x) = -cos(x)$$
$$g^{''''}(x) = sen(x)$$

.

Como temos $x = 0$ vem

$$g(0) = 0$$
$$g^{'}(0) = 1$$
$$g^{''}(0) = 0$$
$$g^{3}(0) = -1$$
$$g^{4}(0) = 0$$

Logo, a Série de Taylor gerada por $sen(x)$ em torno de $x = 0$ é

$$sen(x) = c_0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

A Série de Potência de h(x) = cos(x) é obtida de forma análoga. Calculando as derivadas obteremos:

$$h^{'}(x) = -sen(x)$$
$$h^{''}(x) = -cos(x)$$
$$h^{3}(x) = sen(x)$$
$$h^{4}(x) = cos(x)$$

Como $x = 0$ temos:

$$h'(0) = 1$$

$$h^{'}(0) = 0$$
$$h^{''}(0) = -1$$
$$h^{3}(0) = -0$$
$$h^{4}(0) = 1$$

.

Assim, chegamos em:

$$cos(x) = c_0 + c_1x^1 + c_2x^2 + ... + c_nx^n + ... = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ...$$

Agora, seguindo a ideia de Euler e tornando o expoente de e^x complexo, a Série de Potência dessa função se torna

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + ...$$

Como $i = \sqrt{-1}$ temos:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{(x)^2}{2!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(x)^4}{4!}...$$

Reorganizando a ordem dos termos dessa série temos:

$$e^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...) + i(x - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...)$$

Mas $(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + ...) = cos(x)$ e $(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + ...) = sen(x)$. Assim conclui-se que

$$e^{ix} = cos(x) + isen(x)$$

Maor (2004) mostra que da igualdade anterior é possível obter outras duas relações. Substituindo ix por $-ix$ e usando o fato de que $cos(x) = cos(-x)$ e $sen(x) = -sen(x)$ podemos escrever: $e^{-ix} = cos(x) - isen(x)$. Fazendo agora a soma $e^{ix} + e^{-ix}$ obtemos

$$e^{ix} + e^{-ix} = [cos(x) + isen(x)] + [cos(x) - isen(x)] \Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2cos(x) \Rightarrow cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

E se fizermos a subtração $e^{ix} - e^{-ix}$ teremos

$$e^{ix} - e^{-ix} = [cos(x) + isen(x)] - [cos(x) - isen(x)] \Rightarrow e^{ix} - e^{-ix} = 2isen(x) \Rightarrow sen(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Que são conhecidas como as fórmulas de Euler para funções trigonométricas. Essa relação entre a função exponencial e a trigonometria fez com que outras relações surgissem, entre elas a relação que ficou conhecida como a mais bela fórmula da matemática, que pode ser obtida tomando $x = \pi$ em $e^{ix} = cos(x) + isen(x)$ assim obtendo

$$e^{i\pi} = cos(\pi) + isen(\pi) \Rightarrow e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0 \Rightarrow e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$$

Maor (2004) destaca que esta fórmula de fato é de grande beleza matemática, pois nela estão reunidos os elementos 1 e 0 da aritmética, e da análise, π da geometria, i da álgebra e as três operações mais importantes: adição, multiplicação e exponenciação. Um outro fato interessante de se observar dessa relação é que essa igualdade mostra que a potenciação de um número irracional, o e, com uma potencia complexa, $i\pi$, resulta em um número real, -1.

3.3 A Espiral Logarítmica

A espiral logarítmica é uma curva que despertou não só a curiosidade mas o fascínio de Jakob Bernoulli. Durante seus estudos, Jakob usou de forma extensiva as coordenadas polares, aplicando-as em curvas e estudando as novas propriedades que eram encontradas. Sua missão era formular propriedades de inclinação da curva, sua curvatura, comprimento de arco, área, entre outros, em termos de coordenadas polares, o que na época era um grande desafio (MAOR, 2004).

A Espiral logarítmica é descrita em um sistema de coordenadas polares e sua lei de formação é $r = e^{a\theta}$ na qual a representa a taxa de crescimento da espiral. Tomando $a < 0$ a distância r em relação ao polo diminui e a espiral fica voltada para a direita, já se temos $a > 0$, então r aumenta enquanto a espiral é percorrida no sentido anti-horário (MAOR, 2004).

Na época de Jakob a lei de formação dessa espiral era dada pela sua forma inversa $ln(r) = a\theta$. As propriedades que ela possui causavam fascínio em Jakob, o que o fez desenvolver uma reverência quase mística por ela, então ele a batizou de *spira mirabilis* que traduzido para o português quer dizer 'a espiral maravilhosa'. Ele chegou a expressar o desejo que de que esta curva fosse talhada em seu túmulo com inscrição *Eadem mutata resurgo* que traduzido é "embora mudado, devo me erguer o mesmo". Seu desejo quase foi atendido, mas seja por facilidade ou por certa ignorância, o pedreiro fez uma espiral de Arquimedes em sua tumba, não uma espiral logarítmica como era sua vontade (MAOR, 2004).

Vejamos a seguir algumas propriedades que Maor (2004) aponta a respeito da espiral logarítmica.

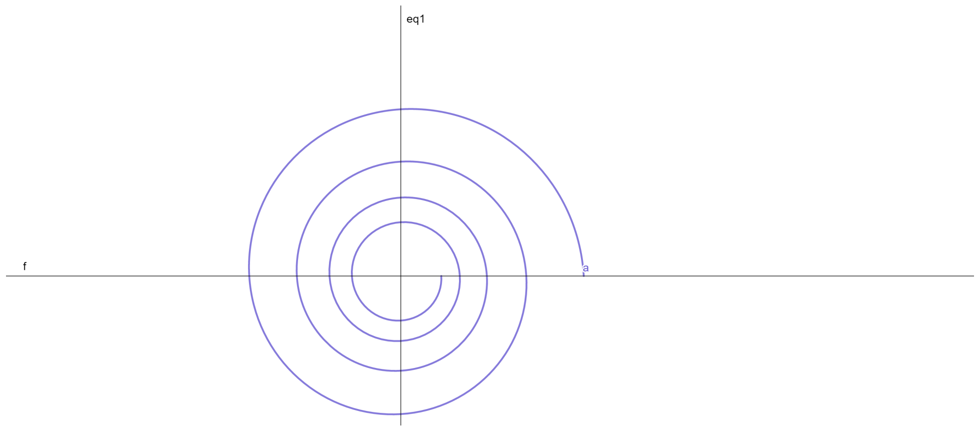
1. Se invertermos a equação que é lei de formação a Espiral Logarítmica, a curva será apenas refletida, isto é: $\frac{1}{r} = \frac{1}{e^{a\theta}} \Rightarrow \frac{1}{r} = e^{-a\theta}$

2. Cada linha reta através do polo atravessa a espiral com o mesmo ângulo, sendo conhecida também como espiral equiangular

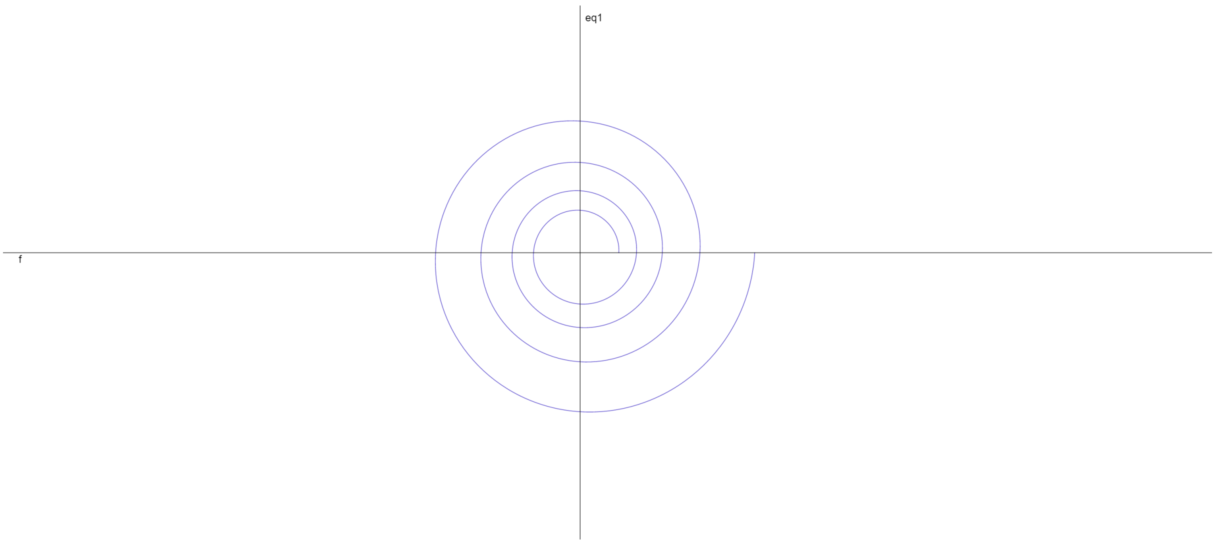
3. aumentando θ em incrementos iguais a distância r do polo aumenta em proporções iguais, isto é, em uma progressão geométrica. Isto pode ser observado de $e^{a(\phi+\theta)} = e^{a\theta} \cdot e^{a\phi}$ em que podemos observar que $e^{a\phi}$ é a taxa comum.

Abaixo vemos um exemplo da espiral logarítmica para valores negativos e positivos de a, respectivamente. Além de propriedades interessantes desta curva, ela está relacionada com a descrição de fenômenos naturais, como o formato de tempestades, galáxias e até mesmo no formato da concha de alguns animais marinhos.

Figura 3.2 – Espiral logarítmica



(a) Espiral Logarítmica $r = e^{-0,06\theta}$



(b) Espiral Logarítmica $r = e^{0,06\theta}$.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Novamente, o número e aparece relacionado a uma curva com propriedades interessantes e que descreve fenômenos naturais, o que de acordo com Arruda (2007) permite indagar e aceitar a conexão do e com tais fenômenos naturais, o que evidencia a importância deste número para a compreensão do mundo que nos cerca.

3.4 A derivada de e^x

Um fato interessante a respeito da derivada da função exponencial de base e é que ela é igual a sua própria derivada, ou seja, tendo $f(x) = e^x$ sua derivada será $f'(x) = e^x$. Disso podemos imaginar que $f^(n)(x) = e^x$, em que $f^(n)(x)$ é a derivada de ordem n de $f(x) = e^x$. Para verificar tal fato demonstraremos que a derivada de uma função exponencial de uma base real a qualquer é dada por $f'(x) = a^x \cdot ln(a)$ e então aplicaremos este resultado a e^x.

Antes de iniciar a demonstração, recordemos que o número e pode ser escrito como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Perceba que se $n \to \infty$ então a parcela $\frac{1}{n} \to 0$ e o expoente $n \to \infty$. Dessa forma se reescrevermos o limite da seguinte forma

$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} \tag{3.3}$$

Não alteramos o resultado do limite porque se $n \to 0$ então a parcela $n \to 0$ e o expoente $\frac{1}{n} \to \infty$, ou seja o resultado de (3.3) continua sendo e.

Queremos provar que a derivada da função exponencial $f(x) = a^x$ é $f'(x) = a^x ln(a)$.

Demonstração. Por definição, a derivada de uma função é

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Desta forma, a derivada de $f(x) = a^x$ será

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

Perceba que o limite acima não depende de x, portanto, por propriedade de limite, podemos escrever

$$f'(x) = a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

Agora, basta provar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = ln(a)$$

Fazendo $a^h - 1 = n$, como $h \to 0$ então $n \to 0$. Desta forma, temos que $a^h = 1 + n$. Para isolar h utilizamos ln de e obtemos

$$ln(a^h) = ln(1+n) \Rightarrow h \cdot ln(a) = ln(1+n) \Rightarrow h = \frac{ln(1+n)}{ln(a)}$$

Portanto, temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{n \to 0} \frac{n}{\frac{ln(1+n)}{ln(a)}} \Rightarrow \lim_{n \to 0} n \cdot \frac{ln(a)}{ln(1+n)}$$

Dividindo o numerador e o denominador de $n \cdot \frac{ln(a)}{ln(1+n)}$ por n obtemos

$$\lim_{n \to 0} \frac{ln(a)}{\frac{ln(1+n)}{n}} = \lim_{n \to 0} \frac{ln(a)}{ln(1+n)^{\frac{1}{n}}}$$

Como $ln(a)$ é uma constante, podemos reescrever o limite da seguinte forma

$$\frac{ln(a)}{ln(\lim_{n \to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}})} \tag{3.4}$$

Mas note que no denominador de (3.4) temos

$$\lim_{n \to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$$

Dessa forma, obtemos a fração $\frac{ln(a)}{ln(e)}$ e como $ln(e) = 1$ concluímos que $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = ln(a)$

Assim, provamos que a derivada de uma função exponencial $f(x) = a^x$ é dada por $f'(x) = a^x \cdot ln(a)$.

Fazendo $f(x) = e^x$ teremos então $f'(x) = e^x \cdot ln(e) \Rightarrow f'(x) = e^x$.

□

A função exponencial de base e é a única, descontando uma constante multiplicativa, que goza de tal propriedade, ela assume papel central na matemática e na ciência porque há inúmeros fenômenos em que a taxa de mudança é proporcional à própria quantidade, tais fenômenos são regidos pela equação diferencial $\frac{dy}{dx} = ay$ em que a é uma constante que determina a taxa de variação em cada caso. A solução desta equação para y é $y = Ce^{ax}$. Como exemplo de alguns fenômenos regidos por equações dessa forma, está o decaimento de uma substância radioativa, a lei do resfriamento de Newton, crescimento populacional, etc (MAOR, 2004).

Desta forma, com o que foi mostrado neste capítulo, percebemos que a presença do e na descrição de curvas que foram importantes para o Cálculo e possibilitaram o avanço matemático em suas áreas mais complexas, o que explicita sua beleza e evidencia que ele está relacionado com a vida prática e no desenvolvimento da ciência de forma geral, permitindo concluir que esta constante é de fundamental importância para compreender o universo em que vivemos. Fatos como esse podem justificar o fascínio que alguns grandes matemáticos como Jakob Bernoulli, por exemplo, desenvolveram por curvas e equações onde há a presença do número $2,71828...$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o exposto no presente trabalho, vimos que a origem do número de Euler é de certa forma obscura já que mesmo em trabalhos antigos e em contextos matemáticos diversos sua presença pôde ser verificada, embora naquela época não houvessem ferramentas matemáticas suficientemente poderosas para a total compreensão da constante e, o que só foi possível com o advento de outras áreas do conhecimento matemático, tais como o Cálculo e Análise. Isto nos mostra que esta constante tem a sua história entrelaçada com estas áreas do conhecimento e o desenvolvimento delas foi de fundamental importância para a compreensão do que é o número e, mas esta conclusão também nos permite dizer que o número e teve seu papel na história dessas ciências, uma vez que já foi objeto de estudo delas quando ainda eram recentes.

Conforme os estudos matemáticos se tornaram mais rebuscados e criteriosos, foi possível verificar a existência do e e descobrir qual é a natureza de tal número, ou seja, foi provado que ele é irracional e posteriormente, baseado nos estudos de Lioville, Hermite provou que o número e é transcendente. Mesmo com questões inerentes à sua natureza ainda sendo descobertas, o e já era amplamente usado na ciência já que está intimamente ligada a fenômenos naturais, é de grande utilidade para construções civis e tem propriedades matemáticas interessantes. Desta forma, este número ocupa espaço central em diversos contextos.

Desta maneira, percebe-se que os assuntos que cercam o Número de Euler são diversos e para a sua total compreensão faz-se necessário o uso de análises matemáticas mais criteriosas e nem sempre de fácil entendimento, o que pode dificultar o estudo mais aprofundado deste número no decorrer da vida acadêmica.

Portanto, este trabalho pode ser útil para a comunidade acadêmica a nível de graduação como fonte de pesquisa para futuros trabalhos, pois aqui foram tratados aspectos referentes à construção histórica deste número, bem como características inerentes à sua natureza e aplicações.

REFERÊNCIAS

ARRUDA, E. J. D. O número de euler e os fundamentos dos números reais. 2007.

FIGUEIREDO, D. G. Números irracionais e transcendentes. 3a edição. *Coleção Iniciação Científica, SBM, Rio de Janeiro*, 2002.

FURTADO, M. F. Algumas realizac oes de charles hermite. *Universidade de Brasilia*, 1996.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo, volume 1, 5a. *Edição, LTC Editora*, 2001.

MAOR, E. *"e":História de um Número*. 2º. ed. [S.l.]: Editora Record, 2004.

NETO, A. A. Matemática financeira: edição universitária. *São Paulo: Atlas*, 2017.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. d. *Números racionais, reais e complexos*. [S.l.]: Ediora da UFRGS, 2011.

ROQUE, T. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

TALAVERA, L. *Parábola e catenária: história e aplicações. 2008. 97 f.* Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Educação)–Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo. 12ª edição*. [S.l.]: São Paulo: Pearson, 2012.

VASCONCELOS, G. d. A. A irracionalidade e transcendência do número e. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2013.