

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS  
Câmpus Central - Sede: Anápolis - CET  
Curso de Matemática

**Aplicações de Números Complexos em Geometria**

JOSÉ EDUARDO GOMES BATISTA

Anápolis

2022



JOSÉ EDUARDO GOMES BATISTA

## **Aplicações de Números Complexos em Geometria**

Trabalho de Curso (TC) apresentado, à Coordenação Setorial do Curso de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Graduado no Curso de Matemática da Universidade Estadual de Goiás.

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dra. Selma Marques de Paiva

Anápolis

2022

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UEG  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

BB333      Batista, José Eduardo Gomes  
a            Aplicações de números complexos em geometria / José  
              Eduardo Gomes Batista; orientador Selma Marques de  
              Paiva. -- Anápolis - GO, 2022.  
              76 p.

              Graduação - Matemática -- Câmpus Central - Sede:  
              Anápolis - CET, Universidade Estadual de Goiás, 2022.

              1. Números complexos. 2. Geometria. 3. Matemática.  
              4. Aplicações. I. Paiva, Selma Marques de , orient. II.  
              Título.





Universidade  
Estadual de  
Goiás



ESTADO DE GOIÁS  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - UEG  
COORDENAÇÃO SETORIAL MATEMÁTICA ANÁPOLIS

**JOSÉ EDUARDO GOMES BATISTA**

### **APLICAÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS EM GEOMETRIA**

Trabalho de Curso II de Matemática apresentado à Banca Examinadora como parte dos requisitos para a obtenção do grau de graduado em Licenciatura em Matemática.

Aprovado. Banca Examinadora do Trabalho de Curso II do curso de Matemática do Campus Central: Sede - Anápolis - CET da Universidade Estadual de Goiás.

Anápolis - Goiás, 18 de março de 2022.

---

Dra. Selma Marques de Paiva  
Orientador(a)/Presidente da banca examinadora

---

Me. Cleber Giuglioli Carrasco  
1º Membro da Banca Examinadora

---

Me. Tiago de Lima Bento Pereira  
2º Membro da Banca Examinadora



Documento assinado eletronicamente por **SELMA MARQUES DE PAIVA, Docente de Ensino Superior**, em 23/03/2022, às 22:33, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



Documento assinado eletronicamente por **CLEBER GIUGLIOLI CARRASCO, Docente de Ensino Superior**, em 24/03/2022, às 10:55, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



Documento assinado eletronicamente por **TIAGO DE LIMA BENTO PEREIRA, Docente de Ensino Superior**, em 24/03/2022, às 12:47, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site  
[http://sei.gov.br/sei/controlador\\_externo.php?](http://sei.gov.br/sei/controlador_externo.php?)



acao=documento\_conferir&id\_orgao\_acesso\_externo=1 informando o código verificador 000028575348 e o código CRC 24A363AE.

COORDENAÇÃO SETORIAL MATEMÁTICA ANÁPOLIS  
RODOVIA BR 153 S/Nº - Bairro ZONA RURAL - CEP 75132-903 - ANAPOLIS - GO  
0- QUADRA ÁREA KM 99 (62)3328-1139



Referência: Processo nº 202200020004306



SEI 000028575348

*Este trabalho é dedicado a todos que estiveram ao meu lado,  
proporcionando-me alento e força de vida, os quais a ausência  
condenaria-me a não conseguir realizar coisa alguma.*



# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por guiar-me em todos os momentos e dar-me forças a cada dia, para continuar seguindo em frente, vencendo minhas dificuldades e sendo persistente nos meus objetivos.

Agradeço aos meus familiares, em especial, à minha mãe, Fabiana Gomes, e minha avó, Fátima Gomes, que, mesmo em meio às dificuldades, proporcionaram-me durante toda minha vida um ensino privilegiado, que moldou meu intelecto e permitiu que eu fizesse uma excelente graduação. Sou grato a minha família por ter me dado apoio, sustento financeiro e ter acreditado em meu potencial.

Agradeço a todos meus colegas que, durante toda a graduação, ajudaram-me com minhas dificuldades, serviram de ótima companhia, parceria e diversão. Vocês sempre acreditaram em minhas capacidades.

Agradeço à professora Selma Marques de Paiva por ter aceitado me orientar e ter enriquecido este trabalho.

À banca que avaliou este trabalho, agradeço pelas correções e sugestões feitas, que proporcionaram importantes melhorias.

Sou grato a todos os professores que já tive, que de alguma forma contribuíram para que eu seguisse essa profissão e possibilitaram que eu conhecesse as belas descobertas sobre o universo que arrepiam-me a cada dia.

Em especial, agradeço à Amanda Lacerda, minha amada, que durante toda a produção deste trabalho me prestou apoio e ajuda, estando comigo nos momentos alegres e nos mais difíceis, não deixando eu desistir, dando-me boas ideias e conquistando os meus sorrisos mais sinceros.

Tenho extrema gratidão a cada um e digo que não seria minimamente capaz de concluir este trabalho sem a ajuda recebida.



*"O caminho mais curto entre  
duas verdades no domínio real  
passa pelo domínio complexo"  
(Jacques Hadamard)*



# RESUMO

Neste trabalho, são investigados conceitos e propriedades dos números complexos, relacionando-os com interpretações geométricas. Um dos problemas que prejudicam o aprendizado de números complexos é o de abordá-los com um viés que os isolam de outros conteúdos da matemática. Por meio de uma revisão bibliográfica, procurou-se relacionar o seu estudo com ideias da geometria, deixando claras as íntimas associações entre essas duas áreas. Uma pesquisa da história concernente às percepções humanas em relação aos números e às questões que levaram a definição dos complexos é realizada, contextualizando a dificuldade, em geral, de se aceitar concepções numéricas que se distinguem do habitual. São feitas definições, demonstrações dos teoremas mais relevantes ao tema deste trabalho e construídos exemplos que esclarecem os conceitos desenvolvidos. As formas algébrica e polar são trabalhadas em capítulos diferentes, realizando-se correspondentes interpretações geométricas em cada um deles. As aplicações são feitas no último capítulo por meio de problemas imperativos propostos. Objetiva-se nesse trabalho, dessa forma, relacionar os números complexos com problemas geométricos.

**Palavras-chave:** Aplicações. Números complexos. Geometria. Matemática.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Papiro de Rhind . . . . .	22
Figura 1.2 – Reta real . . . . .	36
Figura 1.3 – Representação geométrica de um número complexo . . . . .	36
Figura 1.4 – Representação vetorial do número . . . . .	37
Figura 1.5 – Representação dos elementos oposto e conjugado . . . . .	38
Figura 1.6 – Interpretações geométricas da soma e subtração entre dois números complexos	39
Figura 1.7 – Representação da multiplicação por uma constante . . . . .	39
Figura 2.1 – Representação de um ponto . . . . .	42
Figura 2.2 – Representação da forma polar de um número complexo . . . . .	44
Figura 2.3 – Representação do número $z_1 = \sqrt{3} + i$ . . . . .	45
Figura 2.4 – Raízes cúbicas de $(-8)$ . . . . .	52
Figura 2.5 – Multiplicação por $i$ . . . . .	54
Figura 2.6 – Produto de complexos unitários . . . . .	54
Figura 3.1 – Distância $\delta$ entre os pontos $P_1$ e $P_2$ . . . . .	57
Figura 3.2 – Baricentro do triângulo $P_1P_2P_3$ . . . . .	59
Figura 3.3 – Terceiro vértice de um triângulo equilátero . . . . .	60
Figura 3.4 – Terceiro vértice de um triângulo isósceles . . . . .	62
Figura 3.5 – Raízes sextas de 64 . . . . .	64
Figura 3.6 – Triângulo equilátero $PQR$ em um sistema de coordenadas . . . . .	65
Figura 3.7 – Triângulo $P_1P_2P_3$ . . . . .	68
Figura 3.8 – Ilustração do teorema de Napoleão . . . . .	69



# SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>OS NÚMEROS COMPLEXOS: CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA E CONCEITOS INICIAIS . . . . .</b>	<b>21</b>
1.1	Uma relação entre os números e a humanidade . . . . .	21
1.2	Uma breve contextualização histórica dos números complexos . . . . .	24
1.3	Os números complexos . . . . .	28
1.3.1	Soma e diferença . . . . .	30
1.3.2	Multiplicação, divisão e potenciação . . . . .	32
1.4	Forma algébrica e geometria . . . . .	35
1.4.1	Algumas interpretações geométricas . . . . .	38
<b>2</b>	<b>A FORMA POLAR DO NÚMERO COMPLEXO . . . . .</b>	<b>41</b>
2.1	Coordenadas polares de pontos no plano . . . . .	41
2.2	Os números complexos em sua forma polar . . . . .	44
2.3	Operações na forma polar . . . . .	46
2.4	Forma polar e geometria . . . . .	53
<b>3</b>	<b>APLICAÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS EM GEOMETRIA . . .</b>	<b>57</b>
3.1	Distância, ponto médio e baricentro . . . . .	57
3.2	Terceiro vértice de um triângulo . . . . .	60
3.3	Vértices de um polígono regular . . . . .	63
3.4	Área e perímetro . . . . .	64
3.5	Condição para que um triângulo seja equilátero . . . . .	66
3.6	Teorema de Napoleão . . . . .	69
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS - CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>71</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>73</b>



# INTRODUÇÃO

De acordo com Boyer (1974), o desenvolvimento da matemática tem início com a percepção humana da realidade observável e a busca por solucionar problemas de caráter prático. Uma das primeiras ideias matemáticas que o ser humano conseguiu utilizar foi a dos números e, ao longo da história, diversas mudanças ocorreram no significado atribuído a esses objetos.

Os conjuntos numéricos estudados na modernidade nem sempre foram aceitos. No decorrer dos anos, novas situações que apontavam para a existência de números que distinguiam-se daqueles já conhecidos foram percebidas. Até meados do século quinto antes de Cristo, o ser humano utilizava apenas o conjunto dos números racionais. Após a descoberta de que deveriam haver números além desses, foram preenchidas lacunas dentro dos conteúdos da matemática. Valores que antes não existiam em concepções gerais, passaram a ser bem compreendidos. Operações como extrair a raiz quadrada de 2, por exemplo, ganharam significado, ao mesmo passo que a medida da diagonal de um quadrado com lado unitário passou a fazer sentido (GARBI, 2010).

Por outro lado, mesmo sendo considerados todos os números reais, ainda assim, em certas situações, algumas operações e procedimentos matemáticos não fazem nenhum sentido. O processo da extração de raízes com índice par, por exemplo, não gera nenhum valor conhecido nos reais quando se está operando com números negativos. Além disso, nem todas as equações polinomiais possuem solução nesse conjunto.

Nesse contexto, o estudo dos números complexos proporciona à matemática algo equivalente ao que a expansão dos racionais para os reais proporcionou. As operações deixam de se limitar a determinados valores e equações antes não solucionáveis passam a ter raízes conhecidas.

Os complexos também são importantes em aplicações na física e engenharia. Modernas equações conhecidas que descrevem o universo necessitam desses números em sua formulação (STEWART, 2014) e, mesmo que o tema deste trabalho não permita a investigação de aplicações nessas áreas, o conteúdo desenvolvido ao longo de cada capítulo serve como introdução para futuros estudos mais avançados.

Por outro lado, é importante notar que os ramos da matemática podem ser comumente correlacionados, isto é, os conteúdos dessa ciência não costumam ser isolados em relação aos outros. Nesse sentido, faz-se relevante a investigação de aplicações dos números complexos na geometria, para que sejam destacadas associações entre essas diferentes áreas, a fim de enriquecer o estudo de cada uma delas.

Assim sendo, indaga-se: como os números complexos poderiam ser aplicados em

problemas de geometria?

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo geral investigar pertinentes associações entre esses dois conteúdos. Para tanto, foram determinados os seguintes objetivos específicos: fazer uma contextualização histórica do desenvolvimento desses números, a fim de proporcionar maior compreensão do tema; realizar um estudo, tendo como metodologia a pesquisa exploratória bibliográfica dos principais conceitos relacionados aos complexos, necessários às aplicações geométricas, investigando as propriedades e relações estabelecidas com formas algébrica e polar do número; realizar escrita de trabalho científico, a fim de divulgar os resultados alcançados.

Parte-se da hipótese de que problemas normalmente trabalhados em geometria podem ser solucionados com a ótica dos complexos e de maneira, muitas vezes, até mais simples em relação a como tradicionalmente são abordados.

No primeiro capítulo é feita inicialmente uma contextualização histórica, que trata da interpretação humana a respeito dos números ao longo do tempo e dos episódios que culminaram na definição dos complexos. Além disso, são investigados conceitos e propriedades relativos à forma algébrica, fazendo-se, no final, representações geométricas e interpretações da soma, diferença, multiplicação por uma constante real e conjugado.

No segundo capítulo, são feitas considerações que concernem à forma polar. São demonstrados importantes teoremas e realizadas interpretações geométricas do produto e da radiciação.

No terceiro capítulo, busca-se solucionar problemas muitas vezes propostos no estudo da geometria utilizando os números complexos e as interpretações estabelecidas nos capítulos anteriores.

# 1 OS NÚMEROS COMPLEXOS: CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA E CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo, estudaremos os primeiros conceitos relativos ao conteúdo de números complexos. Temos como interesse realizar inicialmente uma breve contextualização histórica do surgimento desses elementos matemáticos, investigando argumentos que justificam a definição dos números complexos e compreender as ideias básicas deste conteúdo, a fim de sermos capazes de realizar formulações e aplicações mais elaboradas neste estudo.

## 1.1 Uma relação entre os números e a humanidade

A matemática é de certo um dos mais sofisticados sistemas já organizados pelo ser humano. Ao longo do tempo, aprendemos a decifrá-la e experimentamos as sensações sublimes da descoberta de padrões e equações, as quais o próprio universo parece estar submetido. Além do sentimento de descobrir e conhecer como funcionam os elementos matemáticos, experimentamos também, muitas vezes, o incômodo em não compreender novas situações e problemas gerados inclusive pela própria descoberta.

A matemática e, mais especificamente, os números representam hoje algo tão imprescindível às atividades humanas que é inconcebível imaginar um mundo sem tal conhecimento, que nos auxilia desde as atividades mais simples, até as mais complexas. Nos tempos primitivos, quando os caçadores-coletores começaram a perceber que poderiam gerar novas plantas a partir dos grãos que obtinham e criar animais de forma controlada, sem a necessidade do nomadismo para se alimentar, a matemática primitiva certamente proporcionou a evolução das relações, de atividades desenvolvidas e até mesmo a persistência da raça humana, em um contexto de sobrevivência do mais adaptado, conforme Boyer (1974).

Em certo momento, foi necessário contabilizar a quantidade de gado que havia, para se ter maior controle e, dessa forma, evitar perdas. Com isso, muito provavelmente, passamos a fazer algumas associações entre a quantidade de animais com a de pequenos objetos, como pedras, para que, por exemplo, dez pedras signifiquem ter dez espécimes de gado ou também caso, em algum momento, uma pedra esteja sobrando em relação a quantidade de animais, isso significasse que algum deles sumiu. Aprendemos, então, a fazer uma associação biunívoca entre dois conjuntos, no caso o de gado e o de pedras, isto é, aprendemos a contar. Segundo Eves (2011), o processo de contagem poderia ser feito, também, utilizando-se os dedos ou marcações na pedra ou no barro.

Com o perdão de ter feito uma regressão tão grande no tempo, os números têm a ver com essa história se pensarmos que seria um tanto quanto mais simples realizar o controle dos animais caso o ser humano já conhecesse a ideia de número. A associação poderia ter sido feita utilizando-se, em vez de pedras, um conjunto como  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , ao qual chamamos hoje de conjunto dos números naturais. No mínimo isso serviria para não precisarmos carregar um punhado de pedras aonde fôssemos.

Ao longo de milênios, diferentes tipos de números foram descobertos e definidos, à medida que os problemas e as necessidades humanas evoluíram. No Egito, em cerca de quase dois milênios a.C., conforme Garbi (2011), já se sabia realizar operações aritméticas envolvendo até mesmo frações. Um documento de grande valor histórico, escrito em meados de 1650 a.C, chamado Papiro de Rhind ou de Ahmes, reúne em seu conteúdo dezenas de problemas matemáticos e o procedimento de como resolvê-los, além de revelar a existência, já nessa época, de escolas que ensinavam matemática. Em uma passagem do papiro, há o seguinte problema proposto: "uma quantidade, somada a seus  $\frac{2}{3}$ , mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é esta quantidade?"(GARBI, 2010, p. 12). É nítido que a ideia de fração já estava estabelecida e eles já utilizavam os ditos números racionais.

Figura 1.1 – Papiro de Rhind



Fonte: <[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Rhind\\_Mathematical\\_Papyrus.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg)>, acesso em 16 fev. 2022.

Esse conhecimento numérico proporcionava ao povo egípcio, segundo Katz (2009) fazer divisões na terra, solucionar questões da administração estatal, realizar construções arquitetônicas, etc. Além disso, o Papiro de Ahmmes mostra que problemas envolvendo equações já eram trabalhados. Na Seção 1.2, esse objeto de estudo dos matemáticos será importante para a compreensão histórica do tema deste trabalho.

Além de ter grande serventia para as atividades humanas, a relação entre matemáticos e os números já foi responsável até mesmo por tragédias, como em um episódio que ocorrera na Grécia Antiga envolvendo os pitagóricos.

Pitágoras de Samos, que é provavelmente um dos mais conhecidos matemáticos de todos os tempos, famoso por ter demonstrado pela primeira vez o teorema que leva o seu nome, teve como um de seus grandes feitos ter criado uma escola de conhecimentos matemáticos, da natureza e filosóficos. Os seus estudos geométricos baseavam suas formulações e demonstrações levando em conta que qualquer medida poderia ser expressa por termos que contêm apenas números, aos quais nomeamos hoje de inteiros, conforme Garbi (2011), e não haveria a possibilidade de existirem medidas que não pudessem ser expressas pela razão de dois inteiros, mais especificamente.

Entretanto, em cerca de 470 a.C, uma embaraçosa descoberta feita por, provavelmente, Hipasus de Metaponto abalou em muito a abstrata estrutura da matemática grega pitagórica, segundo Garbi (2011). Hipasus percebeu que ao construir um triângulo retângulo de catetos ambos com medida 1, por exemplo, isso implicaria que, pela conhecida relação de Pitágoras  $a^2 = b^2 + c^2$ , a hipotenusa,  $a$ , desse triângulo deveria possuir então valor

$$a^2 = 1^2 + 1^2$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$

e, mais do que isso, ele provou que esse valor não poderia ser expresso em termos de uma razão entre dois inteiros somente. Assim, o que ele conseguiu foi provar, portanto, a existência dos chamados números irracionais e, por conta disso, houve um grande abalo entre os pitagóricos, já que todas as formulações foram demonstradas de tal modo que não estava sendo considerado essa possibilidade, ao passo que todas elas teriam, então, que passar por uma nova verificação. De acordo com Boyer (1974), essa constrangedora situação gerou tamanha irritação entre os pitagóricos que, dentre várias versões dessa história, Hipasus teria sido lançado ao mar para morrer, por haver divulgado sua descoberta a outras pessoas.

Algo curioso em relação a números diferentes é que, segundo Roque (2012) na maior parte da história, os matemáticos tiveram grande dificuldade em considerar números negativos como soluções válidas para algum problema. Isso se deve principalmente à matemática ter se desenvolvido muito com suas formulações sempre sendo relacionadas com a geometria. Dessa forma, como não existem quadrados com medida do lado negativa, por exemplo, então não fazia sentido existir números desse tipo. Todavia, hoje compreendemos com muita clareza como soluções negativas de algum problema podem ser interpretadas e, mais do que isso, pode-se ver como as concepções prévias a respeito de um conhecimento nem sempre são suficientes ou adequadas para as questões que podem surgir.

Bem, seja qual tenha sido a experiência de alguém com os números, é inegável o quanto seu uso hoje é indispensável. Por meio deles, organizamos nossas atividades, podemos criar outras ciências, compreender o universo e o mundo em que vivemos, construir as mais sofisticadas máquinas, desenvolver soluções para as enfermidades que nos matam e várias outras

possibilidades, que a maioria, possivelmente, ainda nem sabemos. E, mesmo com o avanço da matemática ao longo de milênios, essa ciência nunca deixou de surpreender os matemáticos com o que ainda havia para ser descoberto em áreas inesperadas e das maneiras mais diversas.

## 1.2 Uma breve contextualização histórica dos números complexos

As equações representam há muito tempo uma parte da matemática que desperta grande curiosidade a quem estuda essa bela ciência. No Egito, há mais de 3500 anos, já se conheciam problemas que hoje interpretamos como equações e se sabia resolver várias delas, como as do 1º grau. A prova disso é o próprio Papiro de Rhind. A maneira pela qual se solucionavam as equações era principalmente pelo método chamado de falsa posição, no qual primeiramente se supõe um valor conveniente como resposta, que provavelmente não seja o correto, e ele vai sendo ajustado até que se chegue no resultado procurado. O problema presente no papiro citado na Seção 1.1 e uma equação do 2º grau também contida nesse documento (a única), por exemplo, foram solucionados por esse método (KATZ, 2009).

Hoje conhecemos formas mais simples de solucionar problemas desse tipo. Como por exemplo, as equações quadráticas, que são do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais e  $a \neq 0$ , podem ser resolvidas de uma maneira geral pela famosa fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.1)$$

Essa expressão, curiosamente, é conhecida no Brasil como fórmula de Bháskara. Todavia não foi descoberta pelo matemático cujo nome ela carrega. Esse método resolutivo das equações quadráticas já era conhecido no mínimo um século antes dele, pelo matemático Sridhara. Mesmo assim, não se sabe ao certo o primeiro a ter conhecimento dela. Além disso, as fórmulas não eram escritas com todos esses símbolos assim como é hoje, já que isso é feito há relativamente pouco tempo. Usava-se para registrá-las normalmente descrições com palavras e imagens (GARBI, 2011).

Algo interessante quanto à expressão 1.1 é que algumas equações do 2º grau, quando aplicadas nela, resultam em algo que não existe nos números reais. Por exemplo, tomando  $x^2 + 2x + 3 = 0$ , ao tentarmos descobrir os possíveis valores da incógnita, temos que

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}.$$

Mas e quanto é  $\sqrt{-8}$ ? Bem, não existe em  $\mathbb{R}$ . Então, para matemáticos que tinham extrema dificuldade em admitir mesmo soluções negativas para um problema, não é difícil imaginar que eles considerariam que algumas equações quadráticas não possuísem solução alguma.

Luca Pacioli <sup>1</sup>, que foi o professor do famoso Leonardo da Vinci, publicou em 1494 a sua obra *Summa de Arithmetica*, um resumo de toda a matemática conhecida na época. Em uma parte do livro, Pacioli fala das equações do 3º grau, que são do tipo  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  e têm, analogamente,  $a, b, c$  e  $d$  reais, com  $a \neq 0$ . Como, em milênios, ninguém conseguira encontrar a solução das equações cúbicas, Pacioli coloca que é impossível encontrá-la (NAHIN, 1998).

Porém, no início do século XVI, um professor de matemática da Universidade de Bolonha, Scipione del Ferro <sup>2</sup>, em seus estudos, fez uma grande descoberta. Conforme Nahin (1998), ele conseguiu chegar na solução geral para um caso específico das equações cúbicas, quando o termo quadrático é nulo, ou seja, ele encontrou o método resolutivo das expressões do tipo

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1.2)$$

Entretanto, mesmo resolvendo um problema que perdurou por vários anos e que foi considerado impossível pelo professor de Leonardo da Vinci, del Ferro não publica sua descoberta, mantendo-a em segredo por décadas.

A decisão de Scipione pode muito bem ser considerada um tanto quanto inusitada, no mínimo. Mas se pensarmos no contexto histórico em que estavam os matemáticos de profissão da época, isso se torna um pouco mais compreensível. Era comum que matemáticos fizessem entre si duelos, que consistiam em propor, um para o outro, uma série de problemas. Quem não conseguisse responder às questões propostas pelo seu adversário era considerado o perdedor e isso poderia lhe custar até mesmo seu cargo, uma vez que as nomeações universitárias costumavam ser temporárias. Dessa forma, enquanto del Ferro mantivesse seu segredo a salvo, teoricamente, ninguém poderia vencê-lo em um duelo (KATZ, 2009).

Segundo Garbi (2010), já nos momentos finais de sua vida, ele decide então revelar sua descoberta para seu aluno Antonio Maria Fior, que não era um matemático muito talentoso. Fior, com posse do conhecimento valioso que recebera de seu mestre, decide usá-lo com o intuito de conquistar certa reputação. Ele desafia a um duelo o matemático italiano Nicolò Fontana, apelidado Tartaglia <sup>3</sup>, que já era relativamente conhecido na época. Depois de desafiado, ele soube de boatos que Fior tinha conhecimento de uma fórmula resolutiva das equações cúbicas sem o termo quadrático. Assim, com sua vontade em não perder o desafio, Tartaglia dedica toda sua capacidade em conseguir chegar na solução dessas expressões e, em fevereiro de 1535, ele consegue esse feito.

Dessa maneira, Tartaglia torna-se na história da matemática a segunda pessoa que

<sup>1</sup> Luca Pacioli (1445-1509). Foi um frade franciscano que produziu várias obras e ensinou matemática em diversos lugares do mundo. Um de seus trabalhos, *De divina proportione*, publicado em 1509, conta com ilustrações desenhadas por Leonardo da Vinci no período em que Pacioli era seu professor (EVES, 2011).

<sup>2</sup> Matemático italiano. Viveu de 1465 a 1526.

<sup>3</sup> Aos onze anos, Tartaglia (1500-1557) foi violentamente espancado por soldados de uma tropa francesa, o que gerou cicatrizes graves em seu rosto, as quais ele escondia com a barba, depois de adulto. Esse fatídico episódio na infância gerou problemas em sua fala e daí vem o apelido Tartaglia, que significa gago (GARBI, 2010).

descobrir a fórmula equivalente hoje a

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (1.3)$$

e, com ela em mãos, vence facilmente o duelo contra Fior, respondendo todas suas questões e não tendo quase nenhum dos problemas que propôs ao adversário respondido, conquistando grande fama por ter vencido aquelas desafiadoras equações cúbicas (KATZ, 2009). Além disso, ao resolver as expressões do tipo 1.2, o que ele conseguiu foi na verdade uma solução geral para equações cúbicas quaisquer, pois é possível fazer nelas transformações que permitem escrevê-las de maneira que não há o termo quadrático, segundo Garbi (2010).

Porém, no mesmo país em que vivia Tartaglia, o matemático e médico Girolamo Cardano<sup>4</sup>, que estava escrevendo uma grande obra matemática, foi um dos que se interessaram em saber qual é essa solução. Cardano teve uma vida bastante conturbada e possuía qualidades não muito elogiáveis. Nasceu de uma relação fora do matrimônio e, apesar de muito inteligente,

[...] constituiu uma família absolutamente desregrada. Seu filho mais velho foi condenado à morte por haver assassinado a esposa. De seu mais novo, Cardano, num acesso de fúria, arrancou as duas orelhas. Em um documento por ele mesmo redigido, definiu-se como desbocado, espião, melancólico, traidor, invejoso, solitário, obscuro, desonesto [...] (GARBI, 2010, p.34).

De acordo com Katz (2009), Cardano enviou várias correspondências a Tartaglia pedindo que ele lhe revelasse o segredo, que, por sua vez, não demonstrou nenhum interesse em fazer isso. Após muitas tentativas, com elogios e ofensas, Cardano conseguiu encontrar-se com Tartaglia pessoalmente e convencê-lo a dizer a solução das antes impossíveis equações cúbicas. Nicolò só cede e revela a Girolamo esse segredo depois de fazer com que ele jurasse não contar ou publicar nada sobre isso, mantendo total sigilo sobre o assunto.

Porém, segundo Nahin (1998), Cardano tinha grande interesse em incluir essa valiosa descoberta em sua obra. Ele não se mantinha financeiramente como um matemático tradicional da época, já que sua profissão principal era como médico. Sendo assim, não havia nenhuma vantagem em manter um conhecimento matemático em segredo. Por outro lado, seria extremamente desleal divulgar a solução, visto que havia feito promessas de não o fazê-lo.

Tempos depois, com alguns boatos a respeito de que Scipione del Ferro teria chegado a resolver as equações do 3º grau, Cardano vai até Bolonha e consegue ver os antigos documentos escritos pelo próprio professor e percebe que ele já havia feito a mesma descoberta muito antes que Tartaglia. Assim sendo, Cardano, mesmo após juras, decide então incluir aquela solução em sua obra, nomeada *Ars Magna*. Após saber disso, Tartaglia fica extremamente furioso, proferindo diversas ofensas contra ele. Esses acontecimentos geraram vários conflitos entre os dois, durante muito tempo. Por conta da divulgação que Girolamo fez na *Ars Magna*, a expressão 1.3 ficou,

<sup>4</sup> Viveu de 1501 a 1576.

por fim, normalmente dita como fórmula de Cardano, um erro histórico que não dá os devidos créditos às contribuições de Tartaglia<sup>5</sup> (NAHIN, 1998).

Vejamos agora no Exemplo 1.1 como essa fórmula é utilizada.

**Exemplo 1.1.** (GARBI, 2010) Descubra a solução da equação  $x^3 - 6x - 9 = 0$  utilizando o método de Tartaglia.

*Solução.*

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} \\ x &= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \\ x &= 2 + 1 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

□

Apenas substituindo o valor obtido como resposta na equação original, podemos ver que a solução está correta, isto é,  $x = 3$  é uma raiz da equação  $x^3 - 6x - 9 = 0$ . É válido salientar que, na maioria das vezes, o uso da fórmula 1.3 não resultará em operações algébricas tão simples como no Exemplo 1.1.

Porém, algo curioso é que, assim como na resolução das expressões quadráticas, ao tentarmos solucionar algumas equações do 3º grau, podemos observar que mais uma vez surgem termos que contêm raízes quadradas de números negativos. Para exemplificar isso, considere agora  $x^3 - 6x - 4 = 0$  e tente aplicá-la no mesmo método resolutivo utilizado no Exemplo 1.1. Assim, teria que

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{2}\right)^3}} \\ x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}} \\ x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

<sup>5</sup> Vale salientar que Cardano dá os devidos créditos a del Ferro e Tartaglia em sua obra. Todavia, como é de se esperar, a fama costuma ser maior ao autor do trabalho (STEWART, 2014).

Note que, nessa situação, surge o termo  $\sqrt{-4}$  e, mais uma vez, esse tipo de expressão não existe em  $\mathbb{R}$ . Todavia, o que poderíamos concluir agora com isso? Supor que não há solução para  $x^3 - 6x - 4 = 0$  não é uma opção. Isso porque é possível, por simples verificação, perceber que os valores  $-2$ ,  $1 + \sqrt{3}$  e  $1 - \sqrt{3}$  são raízes dessa equação e, mais do que isso, todas elas existem no conjunto dos números reais. Foram problemas desse tipo que levaram os matemáticos a cogitar a utilização desses números diferentes de qualquer um conhecido, como  $\sqrt{-4}$ , para solucionar uma equação algébrica, de acordo com Garbi (2010).

Rafael Bombelli (1526-1572) foi um dos primeiros a considerar o uso desses termos que contém raízes quadradas de números negativos em etapas da solução de uma equação. Por exemplo, a própria expressão 1.4 poderia ser resolvida caso o fato de estarmos lidando com esses números não conhecidos fosse ignorado. Foi isso que Bombelli conseguiu realizar, fazendo algumas suposições quanto a forma que os valores  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}$  poderiam ter. Ele era capaz de desenvolver a expressão 1.4 ao ponto de cancelar os termos iguais a  $\sqrt{-4}$  e ter que lidar, após isso, apenas com valores reais, conseguindo chegar na solução da equação, por consequência (ROQUE, 2012).

Sendo assim, em situações como essa, faz-se necessário a utilização de valores não pertencentes aos reais durante o procedimento, mesmo que nem o problema inicial e nem a sua solução contenham termos desse tipo.

Após isso, outros grandes matemáticos utilizaram esses novos números em seus cálculos e, muitas vezes, até mesmo não considerando que eles realmente existiam. O francês René Descartes (1596-1650), em uma de suas obras, refere-se a eles como imaginários. É por conta disso que hoje normalmente chamamos eles dessa forma ou de complexos. Leonhard Euler (1707-1783) contribuiu, ao longo de sua vida, com a criação de importantes notações matemáticas. No campo dos números complexos, foi ele quem definiu  $i$  como sendo o valor cujo quadrado resulta em  $-1$ , isto é,  $i^2 = -1$ . Fez também diversos avanços no estudo desses números, utilizando-os livremente em seus cálculos. Outro grande gênio que fez importantes progressos com os números complexos foi Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Ele foi muito importante ao relacioná-los com a geometria e, por consequência, contribuir para aceitação geral desses objetos matemáticos (GARBI, 2010). A partir da Seção 1.3, aprofundaremos os conceitos envolvidos no conteúdo dos números complexos.

### 1.3 Os números complexos

Nesta seção, trabalharemos os números complexos em sua forma algébrica. Serão definidas as operações aritméticas com esses elementos, veremos os conceitos básicos relativos ao seu conteúdo e faremos interpretações geométricas, investigando importantes propriedades. Utilizaremos como referência as obras de Andreescu e Andrica (2006), Avila (2008), Brown e Churchill (2015), Carmo, Morgado e Wagner (2005), Ripoll, Ripoll e Siqueira (2006), Silva

(2003) e Stewart (2013).

Uma das principais propriedades que percebemos nos números complexos para bem defini-los é a possibilidade de conterem valores que envolvem raízes quadradas de números negativos. Definir um novo conjunto numérico com elementos que possuem essa característica abre diversas possibilidades e enriquece em muito o estudo matemático.

Na seção 1.2, foi analisado como algumas equações não podem ser solucionadas trabalhando-se apenas com números reais. Como visto, a expressão  $x^2 + 2x + 3 = 0$ , por exemplo, ao ser aplicada na fórmula resolvente das equações quadráticas, gera como resultado

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}. \quad (1.5)$$

Porém, caso fosse ignorado o fato de estarmos realizando operações com raízes quadradas de números negativos e mantendo as propriedades dos reais, seria possível desenvolver a expressão 1.5 de tal forma que se possa chegar em

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 \cdot (-2)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-2}}{2} = -1 \pm \sqrt{-2}$$

e, por simples substituição de valores, pode-se verificar que tanto  $x_1 = -1 + \sqrt{-2}$  quanto  $x_2 = -1 - \sqrt{-2}$  solucionariam  $x^2 + 2x + 3 = 0$ , já que

$$\begin{aligned} (x_1)^2 + 2x_1 + 3 &= (-1 + \sqrt{-2})^2 + 2(-1 + \sqrt{-2}) + 3 \\ &= 1 - 2\sqrt{-2} + (-2) - 2 + 2\sqrt{-2} + 3 = 0 \end{aligned}$$

e, analogamente, pode ser visto que  $x_2$  também é uma solução. Sendo assim, esse é um exemplo de como definir os números complexos gera várias possibilidades, já que agora qualquer equação quadrática possui solução e as equações cúbicas que possuem raízes reais podem, de maneira apropriada, serem resolvidas pelo método de Tartaglia (ver Seção 1.2). Vale deixar claro que não são as possibilidades geradas por meio da definição dos números complexos que, necessariamente, a justificam.

**Definição 1.1.** Dizemos que  $z = a + bi$  é um número complexo ou imaginário se  $a$  e  $b$  são reais quaisquer e  $i$  é um número que goza da propriedade  $i^2 = -1$ .

O conjunto de todos os números complexos será denotado por  $\mathbb{C}$  e compreenderemos  $\mathbb{C}^*$  como  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ <sup>6</sup>. A maneira como  $z$  está escrito na Definição 1.1, em termos de  $a$  e  $b$ , é o que se compreende como forma algébrica. Além disso,  $i$  será normalmente referido como unidade imaginária e, apesar de evitado,  $\sqrt{-1}$  poderá ser considerado semelhante a  $i$ , de forma

<sup>6</sup>  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  é o mesmo que  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

que  $(\sqrt{-1})^2 = -1$ . O motivo de se evitar isso envolve o conceito de função e será melhor compreendido na Seção 2.3.

Pela Definição 1.1, pode-se afirmar que, por exemplo,  $z_1 = 2 + 3i$  e  $z_2 = 5i$  são números complexos. No caso de  $z_2$ , tem-se que  $a = 0$ . Os números desse tipo serão chamados de imaginários puros. Além disso, perceba que qualquer valor do tipo  $\sqrt{-c}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  e  $c > 0$ , pode ser escrito em termos de  $i$ , já que, mantendo-se algumas propriedades dos reais,  $\sqrt{(-1)c} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{c} = i\sqrt{c}$ .

**Definição 1.2.** Dado  $z = a + bi$  qualquer, dizemos que  $a$  é a parte real de  $z$  e  $b$  é a parte imaginária e denotamos, respectivamente,  $a = \text{Re}(z)$  e  $b = \text{Im}(z)$ .

Pode-se afirmar que dados  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ ,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Algo interessante é notar que quando  $\text{Im}(z) = 0$ , o número complexo assume a forma  $z = a$ , isto é, um número real qualquer. Com isso, pode-se concluir que todo número real é um caso particular dos complexos. Mais do que isso,  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Será necessário definir as operações aritméticas dentro do conjunto dos números complexos. A soma, diferença, a multiplicação, a divisão e a potenciação serão vistas nesta seção. No Capítulo 2, estudaremos outra forma do número, uma não algébrica, trabalhando essas operações de maneira diferente, além de abordar a extração de raízes enésimas.

Bem, note primeiramente que algumas operações são na verdade casos específico de outras. A subtração  $x - y$ , por exemplo, pode ser interpretada como a soma entre  $x$  e um número dito como oposto de  $y$ , ou seja,  $x + (-y)$ , assim como a divisão  $\frac{x}{y}$  pode ser interpretada como o produto de  $x$  pelo número chamado inverso de  $y$ , sendo então o mesmo que  $x \cdot y^{-1}$ . Tanto o oposto quanto o inverso estão relacionados ao elemento neutro  $e$  da operação e ambos serão definidos de maneira análoga ao que é feito nos reais. Será definido também o conjugado de um número complexo. Além disso, todas operações serão tomadas de maneira que as propriedades básicas dos números reais continuem válidas.

### 1.3.1 Soma e diferença

Considere  $z_1$  e  $z_2$ , em que  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ . Definimos a soma  $z_1 + z_2$  como

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \quad (1.6)$$

Tem-se que  $z_1 + z_2$  é um número complexo, em que  $\text{Re}(z) = a + c$  e  $\text{Im}(z) = b + d$ . Em relação a soma, pode-se observar que o elemento neutro é  $e = 0$  já que  $z + 0 = z$ , para todo número  $z \in \mathbb{C}$ .

**Exemplo 1.2.** Encontre o número que resulta da soma entre  $z_1 = -3 + 2i$  e  $z_2 = 7 + i$ .

*Solução.*

$$z_1 + z_2 = (-3 + 2i) + (7 + i) = (-3 + 7) + (2 + 1)i = 4 + 3i.$$

□

Para pensarmos na diferença, façamos antes a definição do que é o elemento oposto no conjunto dos números complexos. Dizemos que  $-z$  é o oposto de  $z$  se  $z + (-z)$  resulta no elemento neutro, ou seja,  $z + (-z) = 0$ . O oposto de  $z_2 = c + di$  será  $-z_2 = -c - di$ . É simples ver que  $z_2 + (-z_2) = 0$ . Sendo assim, a diferença  $z_1 - z_2$  será tida como a soma com o elemento oposto, isto é,

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) = (a + bi) + (-c - di) \\ &= (a + (-c)) + (b + (-d))i = (a - c) + (b - d)i, \end{aligned} \quad (1.7)$$

ou seja, um número complexo  $z$  tal que  $\operatorname{Re}(z) = a - c$  e  $\operatorname{Im}(z) = b - d$ .

**Exemplo 1.3.** *Determine o resultado da diferença  $z_1 - z_2$ , em que  $z_1 = -3 + 2i$  e  $z_2 = -7 - i$ .*

*Solução.*

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) = (-3 + 2i) + (7 + i) \\ &= (-3 + 7) + (2 + 1)i = 4 + 3i. \end{aligned}$$

□

Perceba que os cálculos realizados tanto no Exemplo 1.2 quanto no 1.3 são equivalentes. Isso porque no segundo foi considerado um valor para  $z_2$  que é igual ao oposto do utilizado no primeiro exemplo.

Para que fiquem explícitas, em seguida serão destacadas as propriedades referentes à soma.

- Propriedade comutativa

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (1.8)$$

- Propriedade associativa

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}. \quad (1.9)$$

- Elemento neutro

Existe um único número  $e$ , sendo  $e = 0$ , tal que

$$z + e = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.10)$$

- Elemento oposto

Para todo  $z \in \mathbb{C}$ , existe um único elemento  $-z$  tal que

$$z + (-z) = e = 0. \quad (1.11)$$

### 1.3.2 Multiplicação, divisão e potenciação

Sendo  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$  e lembrando-se que  $i^2 = -1$ , definiremos a multiplicação  $z_1 z_2$  de forma análoga à propriedade distributiva nos números reais.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Sendo assim, o produto  $z_1 z_2$  é um número complexo  $z$ , tal que  $\operatorname{Re}(z) = ac - bd$  e  $\operatorname{Im}(z) = ad + bc$ . É simples ver que, para um número  $z$  qualquer,  $z \cdot 1 = z$ . Isso significa que  $e = 1$  é o elemento neutro da multiplicação.

**Exemplo 1.4.** Determine o resultado do produto entre  $z_1 = \frac{1}{2} - i$  e  $z_2 = 4 + 7i$ .

*Solução.*

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{1}{2} - i\right) \cdot (4 + 7i) = \frac{4}{2} + \frac{7i}{2} - 4i - 7i^2 = 9 - \frac{1}{2}i$$

□

Além disso, um conceito importante para os estudos dos números complexos é o de conjugado. Compreende-se  $\bar{z}_2$ , o conjugado de  $z_2 = c + di$ , o número  $\bar{z}_2 = c - di$ , ou seja, o número que possui parte imaginária com valor oposto ao do original.

Vejam agora a divisão. Definiremos o quociente  $\frac{z_1}{z_2}$  como

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i. \quad (1.13)$$

O motivo disso é o interesse em que essa operação seja feita de maneira equivalente ao processo de racionalização realizado nos números reais, isto é,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$

e daí chega-se em

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i.$$

Isso quer dizer que, para realizarmos o quociente entre dois números complexos, podemos multiplicar numerador e denominador da fração correspondente pelo conjugado desse segundo e, assim, chegar no resultado correto.

**Exemplo 1.5.** Encontre o resultado do quociente  $\frac{z_1}{z_2}$ , em que  $z_1 = 1 + 3i$  e  $z_2 = -1 + i$ .

*Solução.* Pela expressão 1.13, tem-se

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 3i}{-1 + i} = \left(\frac{1(-1) + 3}{(-1)^2 + 1^2}\right) + \left(\frac{3(-1) - 1}{(-1)^2 + 1^2}\right)i,$$

que resulta em

$$\frac{z_1}{z_2} = 1 - 2i.$$

□

É necessário deixar claro também as propriedades referentes à multiplicação. Para isso, elas serão listadas em seguida.

- Propriedade comutativa

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (1.14)$$

- Propriedade associativa

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}. \quad (1.15)$$

- Elemento neutro

Existe um único número  $e$ , sendo  $e = 1$ , tal que

$$z \cdot e = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.16)$$

- Elemento inverso

Para todo  $z \in \mathbb{C}$ , existe um único elemento  $z^{-1}$  tal que

$$z \cdot z^{-1} = e = 1. \quad (1.17)$$

- Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}. \quad (1.18)$$

A potenciação, na forma algébrica, é realizada de maneira relativamente trabalhosa e pode ser feita de forma equivalente aos produtos notáveis. Para fazermos  $(z)^2 = (a + bi)^2$ , por exemplo, devemos simplesmente realizar o produto  $(a + bi)(a + bi)$ . Analogamente, o cubo de  $z$  é  $(a + bi)(a + bi)^2$  e assim por diante. De maneira geral, o que se considera é que, para qualquer inteiro positivo  $n$ ,

$$(z_1)^n = \underbrace{(a + bi)(a + bi) \dots (a + bi)}_{n \text{ vezes}}, \quad (1.19)$$

para todo  $z$  pertencente a  $\mathbb{C}$  e  $z^0 = 1$ . Além disso, algumas propriedades relativas aos números reais se mantêm novamente. Podemos afirmar que  $z^{m+n} = z^m \cdot z^n$  e, também,  $(z^m)^n = z^{mn}$ . A verificação dessas propriedades pode ser feita de maneira direta utilizando o que foi definido na expressão 1.19.

**Exemplo 1.6.** Encontrar o número cujo valor é o cubo de  $z = 2 - i$ .

*Solução.* Queremos chegar no valor de

$$z^3 = (2 - i)^3 = (2 - i)(2 - i)^2.$$

Assim, convém descobrir antes o valor de  $z^2$ . Tem-se que

$$z^2 = (2 - i)^2 = (2 - i)(2 - i) = 3 - 4i.$$

Logo,

$$z^3 = (2 - i)(3 - 4i) = 2 - 11i.$$

□

Quanto às propriedades referentes à potenciação, todas as seguintes destacadas são válidas no conjunto dos números complexos.

- Produto de potências de mesma base

$$z^m \cdot z^n = z^{m+n}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.20)$$

- Quociente de potências de mesma base

$$\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}, \quad \forall z \neq 0 \in \mathbb{C}. \quad (1.21)$$

- Potência de potência

$$(z^m)^n = z^{mn}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.22)$$

- Potência do produto

$$(z_1 \cdot z_2)^n = (z_1)^n \cdot (z_2)^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.23)$$

- Potência do quociente

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{(z_1)^n}{(z_2)^n}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0. \quad (1.24)$$

Algo interessante em relação à potenciação é quando a base é  $i$ . Por definição, temos que  $i^0 = 1$ . Além disso, observe o que se segue.

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i(i^2) = -i \\ i^4 &= i(i^3) = 1 \\ i^5 &= i(i^4) = i \\ i^6 &= i(i^5) = -1 \\ i^7 &= i(i^6) = -i \\ i^8 &= i(i^7) = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observe que os valores encontrados começam a se repetir. Pode-se ver que  $i^0 = i^4 = i^8 = 1$ ,  $i^1 = i^5 = i$ ,  $i^2 = i^6 = -1$  e  $i^3 = i^7 = -i$ . Mais do que isso, esses são os únicos valores que podem ser encontrados como resultado de  $i^n$ , sendo  $n$  um inteiro não negativo qualquer. Isso é algo curioso, porque não existem valores reais, com exceção de alguns, como 1,  $-1$  ou 0, que formem uma sequência de números se repetindo quando elevados a expoentes inteiros quaisquer. Normalmente, ao se elevar um número real a valores distintos, obtém-se resultados diferentes também. Todavia, propriedades de repetição, como essa, são comuns quando se está trabalhando com números complexos e não ocorrem somente na potenciação ou com a base  $i$ .

**Teorema 1.1.** *Para todo  $n$  inteiro não negativo,  $i^n$  só pode assumir os valores 1,  $i$ ,  $-1$  ou  $-i$ . Mais do que isso, sendo  $n = 4k + r$ , com  $k, r \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq r < 4$ , então  $i^n = i^r$ .*

*Demonstração.* A verificação é simples. Tome um inteiro não negativo  $n$  qualquer. Logo<sup>7</sup>,  $i^n = i^{4k+r}$ , com as mesmas condições estabelecidas no teorema para  $k$  e  $r$ . Assim,

$$i^n = i^{4k} \cdot i^r$$

$$i^n = (i^4)^k \cdot i^r$$

$$i^n = 1^k \cdot i^r$$

$$i^n = i^r.$$

Além disso, perceba que  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$  e, por consequência,  $i^n \in \{1, -1, i, -i\}$ . □

A existência dessa propriedade possibilita conseguirmos descobrir, de maneira relativamente simples, o valor dentre 1,  $i$ ,  $-1$  ou  $-i$  que uma potência de base  $i$  qualquer possui.

**Exemplo 1.7.** *Determine qual é o valor de  $i^{1365}$ .*

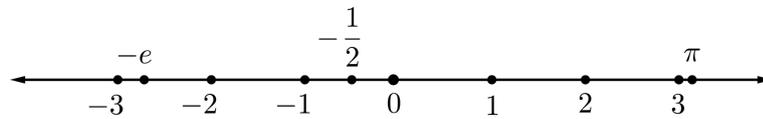
*Solução.* Para descobrirmos o resultado dessa operação, basta primeiramente encontrarmos qual é o resto da divisão de 1365 por 4. É simples ver que  $1365 = 341 \cdot 4 + 1$ , ou seja, 1 é o resto. Por consequência,  $i^{1365} = i^1 = i$ . □

## 1.4 Forma algébrica e geometria

Quando pensamos na interpretação geométrica de números reais, compreendemos que é possível representar todo o conjunto  $\mathbb{R}$  em uma única reta, de maneira que cada um de seus pontos corresponde a um número real. Para ficar claro, veja a Figura 1.2. Podemos considerar o ponto  $P = 0$  como origem e, definindo o sentido positivo da reta, de forma que os números positivos estejam representados à direita de 0 e os valores negativos à esquerda, poderíamos representar qualquer número real.

<sup>7</sup> O motivo de podermos afirmar que um  $n$  qualquer pode ser escrito da forma  $4k + r$  vem dos conhecimentos relativos à divisão euclidiana.

Figura 1.2 – Reta real



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

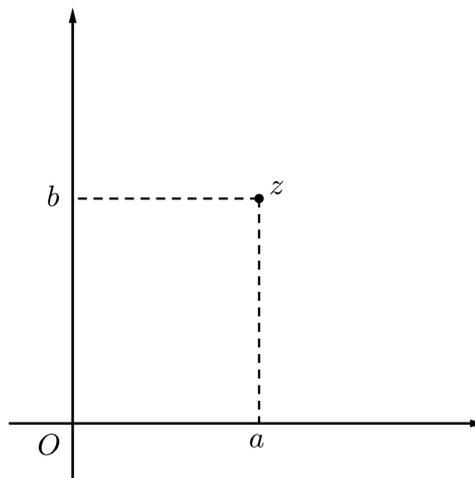
Todavia, não é possível representar um número complexo  $z$  em que  $\text{Im}(z) \neq 0$  na reta real. Para realizarmos a interpretação geométrica desses elementos, associaremos para cada número  $z = a + bi$  um ponto  $P(a, b)$  de um sistema cartesiano  $aOb$  (ver Figura 1.3). Assim sendo, podemos definir uma função

$$c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$z \mapsto P(a, b),$$

com  $c$  bijetora.

Figura 1.3 – Representação geométrica de um número complexo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

**Definição 1.3.** Chamaremos  $P(a, b)$  de imagem ou afixo do número complexo  $z = a + bi$ .

O motivo de citarmos a Definição 1.3 é pelo fato de que um plano é composto de pontos e não exatamente por números. O que estamos fazendo, precisamente, é estabelecer uma relação entre diferentes tipos de entes matemáticos. Mesmo assim, a representação do número será muitas vezes tratada, neste trabalho, como sendo o próprio número, isto é, sem fazer

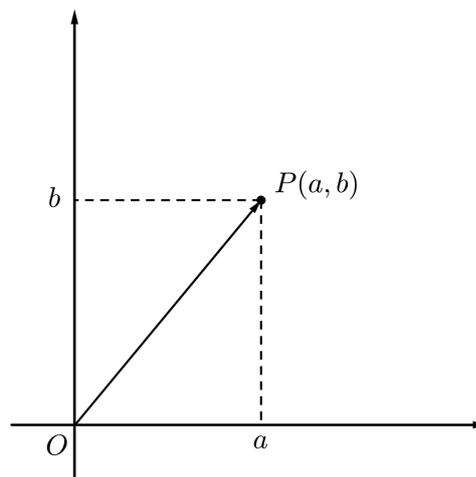
distinção entre  $z$  e sua imagem  $P$ , deixando implícitos os conceitos envolvidos, como acontece na própria Figura 1.3. Além disso, é válido salientar que o sistema de coordenadas  $aOb$  é referido, normalmente, como plano de Argand-Gauss, porém não há nenhuma necessidade em criar uma nomenclatura diferente ao plano.

Perceba que todo elemento de  $\mathbb{C}$  cuja parte imaginária é nula, ou seja, um número real está representado no eixo horizontal, que pode ser interpretado então como a própria reta real. Além disso, podemos observar também que o eixo vertical representa o conjunto de todos os imaginários puros.

Algo importante de ser ressaltado é que, por conta dessa interpretação, muitos autores costumam escrever o número complexo a notação de par ordenado, isto é,  $z = a + bi$  seria escrito simplesmente como  $z = (a, b)$ . Assim, as definições de elemento oposto e conjugado, por exemplo, são notadas como  $-z = (-a, -b)$  e  $\bar{z} = (a, -b)$ , respectivamente. É uma maneira válida e comum de se trabalhar com os números complexos.

Além da interpretação de pontos no plano, uma outra forma de representarmos o número complexo é como vetor. Isso é vantajoso pelo fato de podermos utilizar as propriedades já conhecidas desse objeto matemático. Será possível agora representarmos um mesmo número em qualquer posição do plano, já que dois vetores são equivalentes desde que tenham mesmo módulo, direção e sentido. Definiremos, para fazer a representação de  $z = a + bi$ , o vetor  $\overrightarrow{OP}$ , sendo  $P(a, b)$  a imagem de  $z$  (ver Figura 1.4).

Figura 1.4 – Representação vetorial do número



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

O número associado a um vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$ , em que  $P_1$  e  $P_2$  são imagens de  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente, será descoberto realizando-se a subtração de sua extremidade por sua origem, isto é,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = z_2 - z_1. \quad (1.25)$$

Perceba que na expressão 1.25 é realizada uma igualdade pouco criteriosa, já que pontos estão sendo tomados como equivalentes aos complexos associados a eles. Todavia, o que queremos declarar é que  $z_2 - z_1$  é o número associado ao vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .

Utilizaremos o conceito de vetor para compreender o módulo de um número complexo. Note que o vetor  $\overrightarrow{OP}$ , posicionado no plano conforme a Figura 1.4, coincide com a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm medida  $a$  e  $b$ . Pelo teorema que leva o nome de Pitágoras, o módulo de  $\overrightarrow{OP}$ , denotado por  $|\overrightarrow{OP}|$ , pode ser compreendido como

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = a^2 + b^2$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

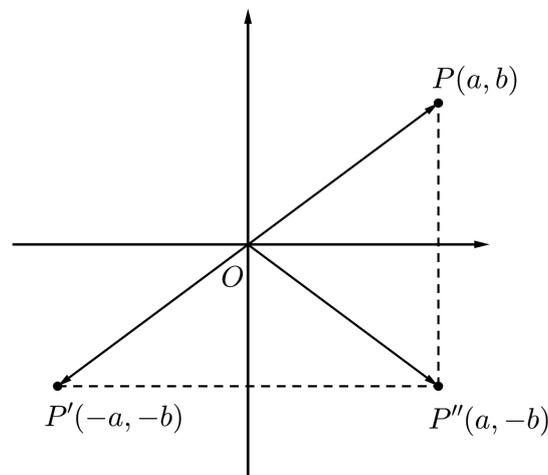
Assim sendo, o módulo do número  $z$  será compreendido, por definição, como

$$|z| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (1.26)$$

### 1.4.1 Algumas interpretações geométricas

A representação dos números complexos como pontos ou vetores no plano é muito oportuna e várias possibilidades surgem à partir dela. Podemos realizar a interpretação geométrica das definições e operações aritméticas, estudadas nesta seção, de maneira simples e direta. Pensando primeiramente no elemento oposto do número e tomando  $z = a + bi$ , podemos interpretar sua representação como o vetor que possui mesmo módulo, direção e sentido oposto ou mesmo como o ponto simétrico à imagem de  $z$  em relação à origem  $O$ . Quanto ao conjugado, pode-se pensá-lo como o ponto refletido em relação ao eixo vertical do sistema de coordenadas  $aOb$  (ver Figura 1.5).

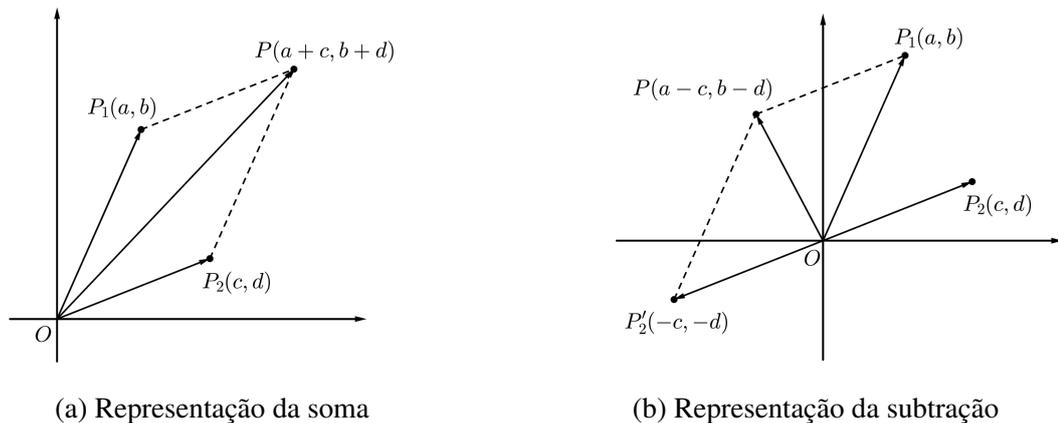
Figura 1.5 – Representação dos elementos oposto e conjugado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Além disso, as regras do paralelogramo, conhecidas dos estudos vetoriais, continuam válidas. Sendo assim, a soma de dois números complexos,  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , cujas imagens são  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, é interpretada como o vetor diagonal do paralelogramo definido por  $\overrightarrow{OP_1}$  e  $\overrightarrow{OP_2}$ , conforme a Figura 1.6a.

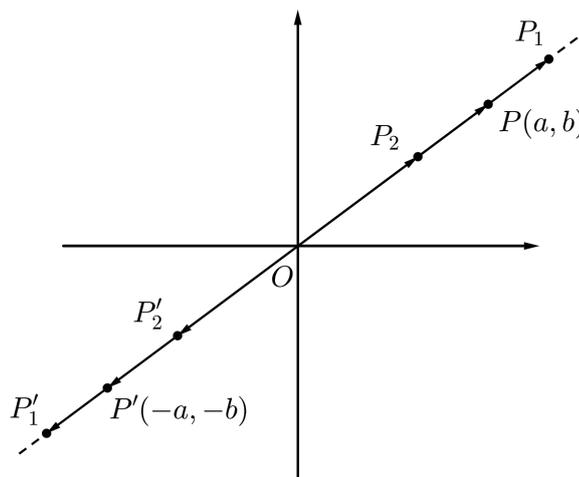
Figura 1.6 – Interpretações geométricas da soma e subtração entre dois números complexos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Quanto à diferença, entendemos  $z_1 - z_2$  como a soma entre  $z_1$  e o elemento oposto a  $z_2$ , conforme estudado na Subseção 1.3.1. Sendo assim, faremos a interpretação geométrica dessa operação reunindo as ideias relativas à representação do elemento oposto e da soma, como ilustrado na Figura 1.6b.

Figura 1.7 – Representação da multiplicação por uma constante



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Por fim, podemos fazer considerações sobre a multiplicação entre um número complexo  $z = a + bi$  e uma constante real  $k$ , sendo a Figura 1.7 uma ilustração dessa situação. Existem diferentes situações a serem analisadas. Primeiramente, quando  $k$  possui valor absoluto maior

que 1, isto é,  $|k| > 1$ , o produto  $kz$  gerará um número complexo de módulo maior que o de  $z$ . Isso significa que, considerando  $P$  a imagem de  $z$ , o vetor  $\overrightarrow{OP_1}$ , correspondente a esse produto, será uma expansão de  $\overrightarrow{OP}$ , com mesma direção. Entretanto, ainda nesse caso, se o valor de  $k$  for negativo, isso implicará numa mudança de sentido. Por outro lado, se  $k$  é um valor tal que  $|k| < 1$ , o produto  $kz$  resultará em um número cujo módulo é menor que o de  $z$ . Assim, o vetor  $\overrightarrow{OP_2}$ , correspondente a essa multiplicação, será uma contração com mesma direção de  $\overrightarrow{OP}$ . Mais uma vez, se  $k < 0$ , então isso resultará em uma mudança de sentido.

É válido enfatizar que ao multiplicarmos  $z$  por  $-1$  é o mesmo que obter seu elemento oposto, da mesma forma que o seu produto por 1 não realizaria nenhuma mudança em sua representação. Quanto a multiplicação por 0, especificamente, é simples chegar à conclusão que o resultado será sempre associado à origem  $O$  do sistema.

# 2 A FORMA POLAR DO NÚMERO COMPLEXO

A representação geométrica de um número complexo qualquer é feita no plano e uma boa maneira de diferenciar os pontos que pertencem ao plano é utilizando as coordenadas cartesianas. Outra forma de fazer isso é com o uso das coordenadas polares, uma opção alternativa de identificar posições sem deixar de interpretá-las como pares ordenados e que pode ser mais adequada no estudo da geometria analítica em diversas situações.

Dessa forma, este capítulo se propõe a apresentar os números complexos em sua forma trigonométrica e mostra que essa representação pode reduzir alguns cálculos, facilitando a compreensão e desenvolvimento do conteúdo. Utilizaremos como referências para este capítulo as obras de Andreescu e Andrica (2006), Avila (2008), Brown e Churchill (2015), Carmo, Morgado e Wagner (2005) e Silva (2003).

## 2.1 Coordenadas polares de pontos no plano

Considere um ponto  $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$  qualquer do plano, desde que  $P$  não seja  $(0, 0)$ , em coordenadas cartesianas. Então,  $x$  e  $y$  descrevem suas posições relativas aos eixos, de forma que  $M(a, b) = N(c, d) \Leftrightarrow a = c$  e  $b = d$ , ou seja, qualquer ponto pode ser representado sem que haja dúvida de sua posição com outro distinto.

Agora imagine que  $P(x, y)$  pertença a uma circunferência de raio  $r$  centrada na origem e o vetor  $\overrightarrow{OP}$  forma com o semieixo positivo das abscissas um ângulo  $\theta$ , definido com a orientação anti-horária, que será tratado neste trabalho em radiano, quando a unidade de medida não estiver explicitada. Assim, sua posição pode ser considerada como o par ordenado  $(r, \theta)$ , de maneira que, equivalentemente, pontos distintos não podem ser representados por coordenadas equivalentes, fazendo dessa interpretação uma maneira alternativa de se representar corretamente pontos no plano. E, dessa maneira, são definidas as coordenadas polares.

As coordenadas polares podem ser obtidas simplesmente com a informação de sua respectiva posição cartesiana e vice-versa, de maneira que para cada par ordenado existe um único outro correspondente, com exceção da origem. Sendo assim, é possível definir uma função

$$p : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi)$$

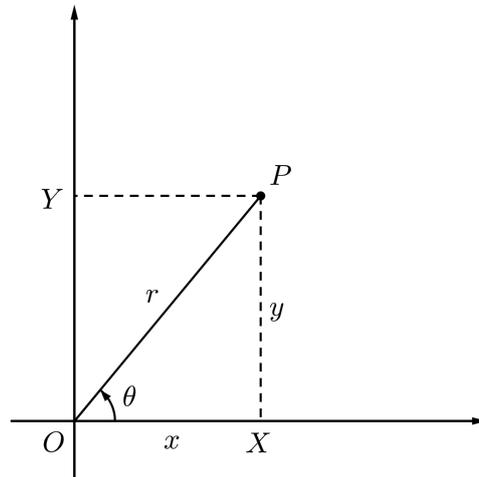
$$(x, y) \mapsto (r, \theta),$$

com  $p$  bijetiva. Já o motivo de se excluir o ponto  $P(0, 0)$  dessa relação é que, apesar de compreendermos que ele pertenceria a uma circunferência centrada na origem de raio  $r = 0$ , há o fato

de que logicamente o vetor  $\vec{OP}$  seria nulo e não definiria ângulo algum com o semieixo positivo das abcissas, ao passo que seria formada a coordenada  $(0, \theta)$ , porém  $\theta$  indefinido.

A forma prática para se realizar essa transformação de coordenadas é primeiramente identificar as possíveis relações conhecidas entre os elementos  $x$  e  $y$  com  $r$  e  $\theta$  na disposição em que se encontram. Para melhor compreensão, observe a representação feita na Figura 2.1. O

Figura 2.1 – Representação de um ponto



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

objetivo é encontrar expressões em que os elementos cartesianos se relacionem com os polares. Observe que nessa disposição existe um triângulo retângulo  $OXP$  com um ângulo  $\theta$ . A primeira relação que pode ser percebida vem do teorema que leva o nome de Pitágoras, ou seja,

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.1)$$

ou ainda,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.2)$$

As próximas vêm de maneira direta das relações trigonométricas. Sabendo que  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  e  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ , tem-se também

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta. \quad (2.3)$$

Partindo dessas relações, é possível transformar pontos quaisquer do plano ou até mesmo curvas inteiras de coordenadas cartesianas para polares. Com o intuito de entendermos melhor essas transformações, apresentaremos alguns exemplos.

**Exemplo 2.1.** Representar em coordenadas polares os pontos  $P_1(0, -1)$ ,  $P_2\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$  e  $P_3\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ .

*Solução.*

Para todos os pontos, o objetivo será descobrir os valores correspondentes de  $r$  e  $\theta$ .

- Em  $P_1$ ,  $r = \sqrt{0^2 + (-1)^2}$ ,  $0 = r \cos \theta$  e  $-1 = r \sin \theta$ .  
Assim,  $r = 1$ ,  $\cos \theta = 0$  e  $\sin \theta = -1$ . Portanto tem-se  $P_1 \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ , em coordenadas polares.
- Em  $P_2$ ,  $r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ ,  $\frac{3}{2} = r \cos \theta$  e  $\frac{3\sqrt{3}}{2} = r \sin \theta$ .  
Assim,  $r = 3$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  e  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Portanto, a solução é  $P_2 \left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ .
- Em  $P_3$ ,  $r = \sqrt{\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}$ ,  $-\frac{5\sqrt{3}}{2} = r \cos \theta$  e  $\frac{5}{2} = r \sin \theta$ .  
Assim,  $r = 5$ ,  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ . Portanto a solução é  $P_3 \left(5, \frac{5\pi}{6}\right)$ .

□

**Exemplo 2.2.** Representar em coordenadas cartesianas os pontos  $P_1 \left(6, \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $P_2 \left(10, \frac{\pi}{4}\right)$  e  $P_3(1, 1)$ .

*Solução.* Tendo as informações sobre os elementos  $r$  e  $\theta$  de cada ponto, o objetivo agora será encontrar suas informações em  $x$  e  $y$ .

- Para  $P_1$ , tem-se  $x = 6 \cos \frac{\pi}{6}$  e  $y = 6 \sin \frac{\pi}{6}$ . Assim, a solução é  $P_1(3\sqrt{3}, 3)$ , em coordenadas cartesianas.
- Para  $P_2$ , tem-se  $x = 10 \cos \frac{\pi}{4}$  e  $y = 10 \sin \frac{\pi}{4}$ . Assim, a solução é  $P_2(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ .
- Para  $P_3$ , tem-se  $x = \cos 1$  e  $y = \sin 1$ . Assim a solução é  $P_3(\cos 1, \sin 1)$ .

□

**Exemplo 2.3.** Escrever as curvas  $x^2 + y^2 = 9$  e  $y = x$  em coordenadas polares.

*Solução.*

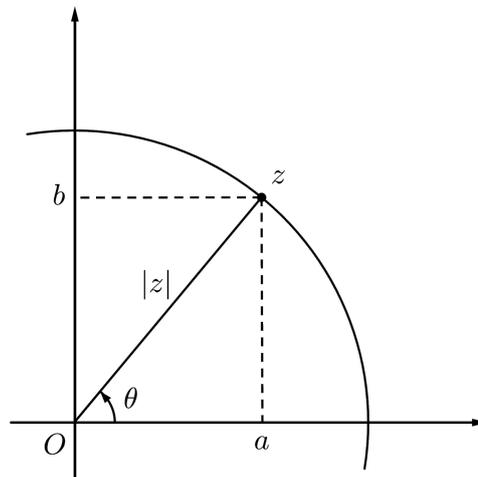
- Em  $x^2 + y^2 = 9$  tem-se exemplificado uma circunferência centrada na origem. Como em 2.2,  $x^2 + y^2 = r^2$ , então  $r^2 = 9$  ou  $r = 3$ . Essa última será a nova expressão que a representa em coordenadas polares. Em outras palavras, a solução desta primeira parte do exemplo é  $r = 3$ . Repare que há nela somente a informação do raio e isso é suficiente por significar que independentemente do valor de  $\theta$ ,  $r = 3$ . Dessa forma, pôde-se expressar de maneira simples e elegante essa curva. Sem perda de generalidade, qualquer circunferência centrada na origem poderá ser expressa simplesmente por sua informação do raio.
- Na equação  $y = x$ , pode-se reescrevê-la como  $r \sin \theta = r \cos \theta$ , conforme 2.3. Daí vem que  $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$  ou  $\operatorname{tg} \theta = 1$ . Portanto, a curva de interesse é representada como  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e essa expressão é a solução da segunda parte desse exemplo. Aqui, há a situação inversa do item anterior. A única informação que necessita ser expressa é o valor do ângulo, ou seja, independentemente do raio,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Assim, a representação dessa curva é a reta que forma com o semieixo positivo das abscissas um ângulo de  $45^\circ$  e contém a origem.



## 2.2 Os números complexos em sua forma polar

Pode-se interpretar geometricamente os números complexos como pontos no plano e, como visto em 2.1, estes podem ser corretamente notados por suas informações de raio e ângulo, em vez de coordenadas cartesianas, conforme analisado. Sendo assim, os números complexos também possuem, por consequência, uma forma alternativa de serem escritos, da qual será chamada de polar ou trigonométrica, que representa uma maneira diferente de se escrever a notação  $z = a + bi$  em termos de  $r$  e  $\theta$ .

Figura 2.2 – Representação da forma polar de um número complexo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Os elementos  $a$  e  $b$  serão, de maneira equivalente, tomados como  $a = r \cos \theta$  e  $b = r \sin \theta$ , ao passo que  $z = a + bi$  é escrito como  $z = r \cos \theta + ir \sin \theta$ . Tem-se, portanto, que a forma polar de um número complexo é

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (2.4)$$

ao passo que o par ordenado  $(r, \theta)$  é a coordenada polar de um número complexo, com  $r \in (0, \infty)$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Cabe agora fazer algumas reflexões a respeito desses elementos. O valor de  $r$  representa o comprimento do raio da circunferência centrada na origem e que contém a imagem do número  $z$ . Além disso, o valor de  $r$  coincide com o módulo de  $z$  e interpretaremos, então,  $r = |z|$ , mesmo que não explicitado. Nessas condições, convém ter em mente a disposição desses elementos como está representado na Figura 2.2.

O ângulo  $\theta$  referente à imagem de um número  $z$  é chamado de argumento, cuja notação adotada será  $\theta = \arg(z)$ . Note que para um número  $z$  o seu argumento não é único, já que  $\theta$

somado com  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , não alteraria a posição de sua imagem no plano. Sendo assim, caso for considerado que  $r \in (0, \infty)$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , a expressão 2.4 pode ser escrita como

$$z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)), k \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Dessa forma, se  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ ,  $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$  e  $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ , considerando  $z_1, z_2 \neq 0$ . Entretanto, apesar da infinidade de argumentos de  $z$ , dados  $r$  e  $\theta$ , estes definem um, e apenas um, número complexo.

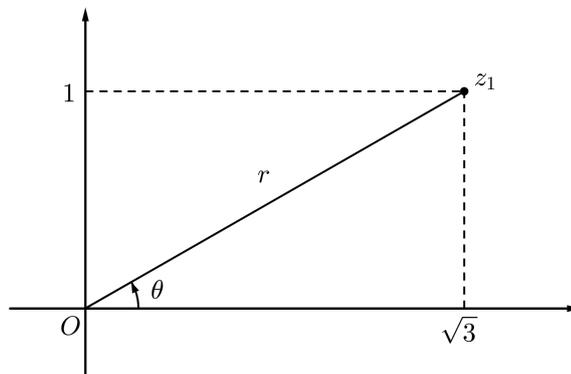
Interpretaremos valores negativos de  $\theta$  como ângulos definidos utilizando-se o sentido horário e quando  $\theta$  é positivo isso significa que está sendo utilizado o sentido convencional que é o anti-horário.

No Exemplo 2.4 mostraremos uma maneira de realizar a mudança de um número da forma algébrica para a trigonométrica e vice-versa. Vale salientar que as relações necessárias para realizarmos essas mudanças são as mesmas destacadas na Seção 2.1. Além disso, qualquer outra relação válida percebida poderá ser normalmente utilizada.

**Exemplo 2.4.** Escreva  $z_1 = \sqrt{3} + i$  na forma polar e  $z_2 = 3(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$  na forma algébrica.

*Solução.* O número  $z_1$  está representado geometricamente na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Representação do número  $z_1 = \sqrt{3} + i$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Para realizarmos a mudança desejada, devemos descobrir os valores de  $r$  e  $\theta$  nas disposições em que se encontram. Para tanto, é importante perceber que

$$r^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2.$$

Assim,

$$r = 2.$$

Também, note que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim,

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}.$$

Dessa maneira, sua forma polar é

$$z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right).$$

Quanto ao número  $z_2$ , encontrar sua forma algébrica significa apenas resolver as operações trigonométricas presentes em sua expressão e realizar algumas simplificações.

$$z_2 = 3(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$$

$$z_2 = 3(-1 + 0).$$

Portanto, concluímos que

$$z_2 = -3.$$

□

## 2.3 Operações na forma polar

É compreensível questionarmos sobre a necessidade ou vantagem de se definir uma segunda forma para os números complexos, ainda mais quando essa forma se apresenta, aparentemente, menos simples que a algébrica. Bem, além de abordar algumas operações entre números complexos, nesta seção objetivamos mostrar algumas possibilidades que a transformação para coordenadas polares nos permite.

É conveniente agora tratar novamente um pouco mais das operações de multiplicação e divisão, analisando as principais consequências de cada uma. Para alcançar tal intuito, considere dois complexos quaisquer  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ . Pensando primeiramente na multiplicação, é interessante verificarmos a possibilidade de se encontrar alguma relação útil ao realizarmos o produto  $z_1 z_2$ . É verdade que

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

e daí vem

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)). \quad (2.6)$$

Bem, até o momento, não temos uma fórmula tão proveitosa para a multiplicação de dois números complexos. Porém, é possível desenvolver a expressão 2.6 se conhecidas duas específicas identidades da trigonometria que tratam de soma de ângulos. São elas

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \quad (2.7)$$

e

$$\operatorname{sen}(\theta_1 \pm \theta_2) = \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \pm \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1. \quad (2.8)$$

Assim,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \quad (2.9)$$

Tem-se, portanto, que para efetuarmos o produto de dois números na forma polar, deve-se simplesmente multiplicar seus módulos e somar seus argumentos. É nesse ponto que será investigada uma das grandes possibilidades que a forma trigonométrica nos apresenta. A expressão 2.9 mostra como realizar o produto entre dois números  $z_1$  e  $z_2$ . Mas, e se substituirmos  $z_1$  e  $z_2$  pelo mesmo número  $z$ ? É interessante observarmos o que acontece.

$$z z = r r (\cos(\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta))$$

$$z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta). \quad (2.10)$$

Ora, isso significa que, utilizando a relação do produto 2.9, podemos encontrar uma fórmula geral para o quadrado de qualquer número complexo e que esta operação é feita elevando o módulo de  $z$  à segunda potência e multiplicando seu argumento por 2. Cabe agora encontrar, também, qual seria o resultado se os números escolhidos fossem  $z$  e  $z^2$ .

$$z z^2 = r r^2 (\cos(\theta + 2\theta) + i \operatorname{sen}(\theta + 2\theta))$$

$$z^3 = r^3 (\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta). \quad (2.11)$$

Dessa forma, é possível encontrar também a relação que expressa, de maneira genérica, o cubo de um número complexo. Além disso, o resultado encontrado mostra que para encontrarmos o cubo de  $z$  basta elevar seu módulo à terceira potência e multiplicar seu argumento por 3, algo semelhante ao encontrado em 2.10. Nessa situação, é tentador concluir que  $z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ . Entretanto, é necessário que isso seja provado. A demonstração desse teorema será feita pelo método de indução matemática.

**Teorema 2.1.** (Primeira fórmula de Moivre)  $z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Primeiramente, verifica-se a validade dessa relação para  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} z^1 &= (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^1 \\ z^1 &= r^1(\cos(1\theta) + i \operatorname{sen}(1\theta)), \end{aligned}$$

portanto válido. Agora, tendo como hipótese de indução (HI) que

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

seja verdadeiro para todo  $n$  natural, prova-se que também seria válido para o sucessor de  $n$ , ou seja, deseja-se demonstrar que

$$z^{n+1} = r^{n+1}[\cos[(n+1)\theta] + i \operatorname{sen}[(n+1)\theta]].$$

Bem,

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{n+1} \\ z^{n+1} &= [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n \cdot r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \\ z^{n+1} &= \underbrace{r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)}_{\text{(HI)}} \cdot r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

e, pela relação do produto em 2.9,

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= r^n r [\cos(n\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(n\theta + \theta)] \\ z^{n+1} &= r^{n+1} [\cos[(n+1)\theta] + i \operatorname{sen}[(n+1)\theta]]. \end{aligned}$$

□

Dessa maneira, tendo sido demonstrado o Teorema 2.1, pode-se concluir que, ao definirmos a forma polar do número, obteve-se, como consequência, uma poderosa possibilidade para se realizar operações envolvendo potências de números complexos. Assim, o que poderia ser inviável na forma algébrica, como realizar o cálculo  $(\sqrt{3} + i)^{10}$ , por exemplo, não seria grande problema caso se utilize a forma trigonométrica. Uma informação relevante é que essa primeira fórmula de Moivre estende-se também por todo conjunto dos inteiros, cuja demonstração ainda será realizada.

É apropriado agora tratar da operação da divisão entre dois números complexos. Considere  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ , a razão  $\frac{z_1}{z_2}$  é expressa como

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)},$$

a qual pode ser desenvolvida multiplicando-se numerador e denominador por  $(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)$ , tendo em mente as identidades 2.7, 2.8 e a relação fundamental da trigonometria  $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2(\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dessa forma, podemos concluir que a divisão entre dois números complexos na forma polar é realizada dividindo seus módulos e subtraindo seus argumentos. Uma possibilidade imediata que isso gera é descobrirmos qual seria o inverso de um número qualquer, realizando-se menos cálculos. Para isso, bastaria escolhermos  $z_1 = 1$  e  $z_2 = z$ , que resulta em

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)),$$

ou seja,

$$z^{-1} = \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)). \quad (2.13)$$

Sendo agora conhecidas as relações de  $z^n$  e  $z^{-1}$ , podemos investigar a validade do Teorema 2.1 para todo  $n$  inteiro. Isso seria o equivalente a provar que

$$z^{-n} = r^{-n} (\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta))$$

é válido para todo  $n$  natural. Faremos essa demonstração pelo método de indução matemática, novamente.

**Teorema 2.2.**  $z^{-n} = r^{-n} (\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)), \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos verificar se é válido para  $n = 1$ .

$$z^{-1} = \frac{1}{r} (\cos(-1\theta) + i \operatorname{sen}(-1\theta)).$$

Assim, é verdadeiro para o primeiro  $n$ .

Agora, assumindo que

$$z^{-n} = r^{-n} (\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta))$$

seja válido para todo  $n$  natural (HI), vamos verificar se também seria válido para  $n + 1$ .

$$z^{-(n+1)} = z^{-n-1} = z^{-n} \cdot z^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{r^{-n}[\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)]}_{\text{(HI)}} \cdot r^{-1}[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] \\
&= r^{-(n+1)}[\cos(-(n+1)\theta) + i \operatorname{sen}(-(n+1)\theta)].
\end{aligned}$$

□

Assim, como poderíamos verificar facilmente que para  $n = 0$  essa propriedade também é válida, fica demonstrado que a primeira fórmula de Moivre se estende por todo o conjunto  $\mathbb{Z}$ .

Além das operações já trabalhadas, falta ainda verificarmos como a radiciação acontece nos números complexos. Para tanto, é necessário antes defini-la.

**Definição 2.1.** Dizemos que  $s$  é a raiz enésima de  $z$  se  $s^n = z$ , para todo inteiro  $n \geq 2$ .

Por exemplo, poderíamos afirmar, então, que os números  $1$ ,  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  e  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , que estão na forma algébrica, são raízes cúbicas de  $1$ , já que cada um deles ao ser elevado a terceira potência resulta em  $1$ . Podemos observar então que, em  $\mathbb{C}$ , é possível que um elemento tenha mais de um valor como raiz. Isso é algo novo se pensarmos que nos reais não há essa possibilidade, já que a raiz enésima de qualquer número sempre leva a apenas um único valor.

Porém, mais interessante que verificarmos se algum número é ou não raiz de outro seria realizar a operação da radiciação com qualquer valor complexo e descobrirmos todas as suas raízes de índice  $n$ . No Teorema 2.3, veremos a expressão normalmente utilizada para se realizar esse cálculo.

**Teorema 2.3.** (Segunda fórmula de Moivre) As raízes enésimas  $s$  de um número  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  são dadas pela fórmula

$$s = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.14)$$

*Demonstração.* Bem, para chegarmos nessa relação, podemos considerar um número complexo  $s = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$  e então a igualdade  $s^n = z$  pode ser escrita como

$$[\rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

ou

$$\rho^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Dessa forma, podemos afirmar que

$$\rho^n = r \quad \text{e} \quad n\alpha - \theta = 2k\pi,$$

$k \in \mathbb{Z}$ , conforme a Seção 2.2 deste capítulo. Logo,

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

e, substituindo os valores encontrados em  $s$ , concluímos que

$$s = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right).$$

□

A maneira de descobrir, então, as raízes enésimas de um número  $z$  na forma polar é substituir devidamente suas informações de  $r$  e  $\theta$ , assim como o índice  $n$  da raiz na expressão 2.14 e, como já sabemos que essa operação, nos números complexos, pode gerar mais de um valor, variamos  $k$  para descobrirmos cada um deles.

**Exemplo 2.5.** Determinar as raízes cúbicas de  $-8$ .

*Solução.* Primeiramente escrevemos o número  $z = -8$  na forma polar. Assim,

$$z = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi).$$

Em seguida, podemos utilizar a fórmula 2.14 para determinar suas raízes cúbicas.

$$\begin{aligned} s &= \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \\ s &= 2 \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

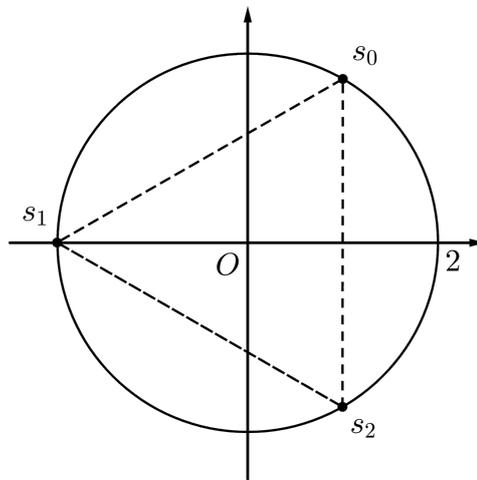
É necessário agora escolher diferentes valores inteiros  $k$ , para chegar no resultado desejado. Vamos admitir  $k = 0, 1$  e  $2$ .

- Para  $k = 0$ , temos  $s_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i$ ;
- para  $k = 1$ , temos  $s_1 = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -2$ ;
- para  $k = 2$ , temos  $s_2 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i$ .

Portanto, as raízes cúbicas de  $-8$ , em  $\mathbb{C}$ , são  $s_0 = 1 + \sqrt{3}i$ ,  $s_1 = -2$  e  $s_2 = 1 - \sqrt{3}i$  e apenas elas. A representação geométrica dos números  $s_0$ ,  $s_1$  e  $s_2$  pode ser vista na Figura 2.4.

□

Entretanto, apesar de correto o resultado obtido na solução do Exemplo 2.5, é compreensível nos questionarmos se os valores encontrados são de fato as únicas raízes cúbicas de  $-8$ . Isso porque, se  $k$  é um inteiro, podemos substituir nele infinitos valores na expressão 2.15, em vez de somente 0, 1 e 2. Sendo assim, poderiam existir, então, infinitas soluções para esse exemplo? A resposta é não. Caso fossem substituídos outros valores quaisquer, seriam encontradas apenas as raízes  $-2$ ,  $1 + \sqrt{3}i$  e  $1 - \sqrt{3}i$ , como afirma o Teorema 2.4.

Figura 2.4 – Raízes cúbicas de  $(-8)$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

**Teorema 2.4.** No conjunto dos números complexos, todo número possui  $n$  raízes enésimas.

*Demonstração.* Façamos a verificação disso, considerando  $s = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$  raiz de  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ . Como visto,  $\arg(s) = \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$  ou

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k \left( \frac{2\pi}{n} \right).$$

Tomemos para  $k$  os valores  $0, 1, 2, \dots, n-1, n, n+2$ , e assim por diante e observemos o que ocorre.

- Para  $k = 0$ ,  $\alpha_0 = \frac{\theta}{n}$ ;
- para  $k = 1$ ,  $\alpha_1 = \frac{\theta}{n} + \left( \frac{2\pi}{n} \right)$ ;
- para  $k = 2$ ,  $\alpha_2 = \frac{\theta}{n} + 2 \left( \frac{2\pi}{n} \right)$ ;
- $\vdots$              $\vdots$
- para  $k = n-1$ ,  $\alpha_{n-1} = \frac{\theta}{n} + (n-1) \left( \frac{2\pi}{n} \right)$ ;
- para  $k = n$ ,  $\alpha_n = \frac{\theta}{n} + n \left( \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{\theta}{n} + 2\pi$ ;
- para  $k = n+1$ ,  $\alpha_{n+1} = \frac{\theta}{n} + (n+1) \left( \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{\theta}{n} + \left( \frac{2\pi}{n} \right) + 2\pi$ ;
- $\vdots$              $\vdots$

Em  $k = n$ , o argumento  $\alpha_n$  torna-se equivalente a  $\alpha_0$ , assim como  $\alpha_{n+1}$  é equivalente a  $\alpha_1$  e assim por diante. Além disso, pode-se verificar que o mesmo ocorre quando escolhemos, para  $k$ , inteiros negativos. Os valores começam a se repetir, ao passo que todo número  $z$  possui, portanto,  $n$  raízes enésimas distintas.

□

No conjunto dos números reais, para cada número existe uma, e apenas uma, raiz de índice  $n$ . Assim sendo, poderíamos definir uma função  $f$ , bijetora, que associa para cada  $x$  um valor  $\sqrt[n]{x}$ . Nessas condições, a notação de  $\sqrt[n]{x}$  pode ser associada a ideia de função de um dado elemento. Esse é o motivo pelo qual evitaremos escrever  $\sqrt[n]{z}$  para se referir à raiz de um número complexo, já que, para cada elemento de  $\mathbb{C}$ , existe mais de uma raiz associada, não havendo compatibilidade com o conceito de função.

## 2.4 Forma polar e geometria

Um dos focos principais deste trabalho é investigar as relações que os números complexos podem estabelecer com a geometria. Uma consequência proporcionada pela forma trigonométrica foi possibilitar a interpretação geométrica de operações além da soma ou diferença de maneira generalizada.

Façamos algumas investigações do que ocorre no plano, quando são multiplicados dois números em diferentes casos. Primeiramente, considere o produto apenas em complexos unitários, que pertencem a uma circunferência de raio 1 centrada na origem. Tomando  $u_1 = (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e percebendo que  $|u_1| = 1$ , vamos realizar a multiplicação entre  $u_1$  e a unidade  $i$ , para observar o que ocorre. Para tanto, é necessário que antes tomemos conhecimento das identidades trigonométricas <sup>1</sup>

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} \theta \quad (2.16)$$

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta. \quad (2.17)$$

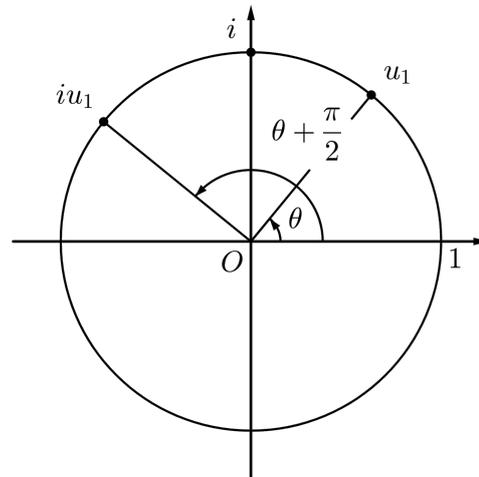
Tem-se que

$$iu_1 = i(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$$

$$iu_1 = -\operatorname{sen} \theta_1 + i \cos \theta_1$$

$$iu_1 = \cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.18)$$

<sup>1</sup> A veracidade de tais identidades vem dos estudos de trigonometria e não realizaremos as demonstrações delas neste trabalho.

Figura 2.5 – Multiplicação por  $i$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

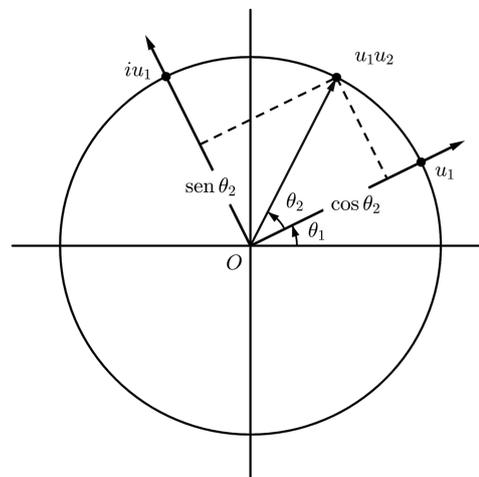
Com isso, podemos interpretar geometricamente a operação realizada como uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  rad no sentido positivo do ciclo trigonométrico em torno da origem, conforme representado na Figura 2.5.

Tendo como interesse agora analisar o produto entre dois complexos unitários quaisquer, vamos supor, além de  $u_1$ ,  $u_2 = (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ . Logo,

$$\begin{aligned} u_1 u_2 &= u_1 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ u_1 u_2 &= \cos \theta_2 u_1 + \operatorname{sen} \theta_2 i u_1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Assim sendo, podemos pensar  $u_1 u_2$  como a soma dos vetores  $\cos \theta_2 u_1$  e  $\operatorname{sen} \theta_2 i u_1$ , isto é, o vetor diagonal do paralelogramo definido por eles (ver Figura 2.6).

Figura 2.6 – Produto de complexos unitários



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Podemos concluir daí que realizar o produto entre  $u_1$  e  $u_2$  é o mesmo que, geometricamente, realizar uma rotação em  $u_1$ , no sentido positivo do ciclo trigonométrico em torno da origem, de um ângulo igual a  $\arg(u_2)$ .

Para ficar clara a interpretação da Figura 2.6, observe primeiramente que foi considerado um novo sistema cartesiano no plano convencional, cujo eixo das abscissas coincide com  $Ou_1$ . Com o resultado obtido na expressão 2.18, chegamos a conclusão, então, que o eixo das ordenadas desse novo plano coincide com  $Oiu_1$  pelo fato de  $iu_1$  ser, geometricamente,  $u_1$  rotacionado em  $90^\circ$  no sentido positivo do ciclo trigonométrico. Note também que os vetores  $\cos \theta_2 u_1$  e  $\sin \theta_2 iu_2$  estão implicitamente representados nesses novos eixos, cujos módulos são  $\cos \theta_2$  e  $\sin \theta_2$ , respetivamente, e tendo  $Ou_1 u_2$  a diagonal do paralelogramo definido por esses dois vetores. Além disso, o vetor  $u_2$  não foi representado unicamente por questões estéticas e didáticas.

Quando o produto de complexos é feito com números não unitários, a ideia geométrica da rotação se preserva, porém há mudanças quanto ao módulo do resultado desse produto. Tomemos  $z_1$  e  $z_2$  quaisquer. Vamos escrever  $z_1 = r_1 u_1$  e  $z_2 = r_2 u_2$ ,  $u_1$  e  $u_2$  unitários. Logo,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 u_1 u_2.$$

Como já é conhecida a interpretação geométrica de  $u_1 u_2$ , multiplicamos ele por  $r_1 r_2$  (estamos alterando seu módulo) e, dessa maneira, podemos chegar à compreensão geométrica da multiplicação de dois números complexos quaisquer.

Devemos fazer uma observação relevante. Quando escolhemos um número  $z$  qualquer e o multiplicamos por um complexo unitário  $u$ , estamos realizando na imagem de  $z$  uma rotação positiva de  $\arg(u)$ , mantendo sua distância à origem, isto é o número que resultará desse produto tem o mesmo módulo que  $z$ . Por exemplo,

$$u_1 = \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

pode ser pensado como o número ao qual precisaremos multiplicar um valor para que sua imagem sofra uma rotação positiva de  $\frac{\pi}{3}$  rad. Além disso, se desejarmos rotacionar um ponto em  $\frac{\pi}{3}$  rad, diminuindo sua distância à origem, no processo, bastaria escolhermos um número com módulo menor que 1.

Agora, façamos uma importante consideração sobre a radiciação. No Exemplo 2.5, observe que a representação das três raízes cúbicas de  $-8$  na Figura 2.4 determinou um triângulo e, mais do que isso, um triângulo equilátero. Esse fato não é uma coincidência, como pode ser visto no Teorema 2.5.

**Teorema 2.5.** *As imagens das raízes enésimas de um número complexo  $z$  são vértices de um polígono regular de  $n$  lados, inscrito em uma circunferência de raio  $\sqrt[n]{r}$ ,  $r = |z|$  centrada na origem.*

*Demonstração.* Para realizar essa demonstração, considere  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  as imagens de  $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ , respectivamente, que são raízes do número  $z$ . Agora observe que  $OP_k$  possui o

mesmo módulo que  $|s_k| = \sqrt[n]{r}$ , para qualquer  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Assim sendo, todos os pontos  $P_k$  pertencem a uma circunferência de raio  $\sqrt[n]{r}$  centrada na origem.

Além disso, considere o arco  $P_k P_{k+1}$ . Sua medida pode ser compreendida como

$$\arg(P_{k+1}) - \arg(P_k) = \frac{\theta}{n} + (k+1) \left( \frac{2\pi}{n} \right) - \left[ \frac{\theta}{n} + k \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

$$\arg(P_{k+1}) - \arg(P_k) = \frac{2\pi}{n}.$$

Portanto, todo arco definido por imagens adjacentes das raízes de  $z$  tem valor  $\frac{2\pi}{n}$ , isto é, o polígono  $P_0 P_1 \cdots P_{n-1}$  é regular.  $\square$

Apesar de já ter sido afirmado que neste trabalho poderíamos nos referir a imagem  $P$  de um número complexo  $z$  como simplesmente  $z$ , deixando implícito os conceitos envolvidos, no Teorema 2.5 isso não foi feito por questões meramente arbitrárias.

# 3 APLICAÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS EM GEOMETRIA

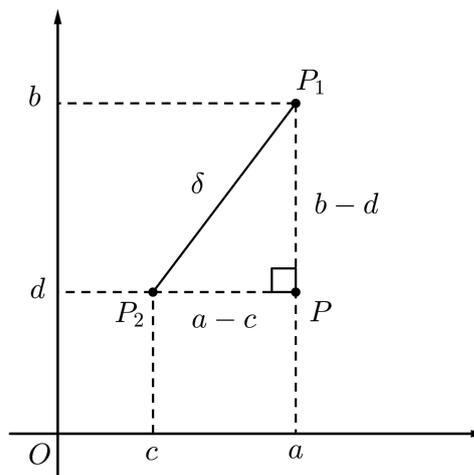
Neste capítulo, investigaremos aplicações sobre o que estudamos de números complexos nos Capítulos 1 e 2 na área de geometria. Veremos problemas que são comumente propostos quando estudamos esse ramo da matemática sob a ótica interpretativa dos números complexos. Nos reservaremos a investigar aplicações nas geometrias plana e analítica. Além disso, é importante destacar que, em cada aplicação, utilizaremos notações de ponto e vetor para realizar determinadas operações. Todavia, no contexto das manipulações algébricas, o que consideraremos na verdade é que tais notações designarão o número complexo correspondente a um determinado ponto ou vetor, ao passo que não realizaremos operações, como soma e multiplicação, entre um complexo e um vetor, por exemplo.

## 3.1 Distância, ponto médio e baricentro

**Aplicação 1.** (ANDREESCU; ANDRICA, 2006) *Determinar a distância entre dois pontos  $P_1(a, b)$  e  $P_2(c, d)$  no plano.*

*Solução.* Vamos tomar  $P_1$  e  $P_2$  como as imagens de  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , respectivamente. Podemos destacar um triângulo retângulo  $PP_1P_2$ , cuja hipotenusa tem comprimento  $\delta$  e os catetos medem  $a - c$  e  $b - d$ , como ilustra a Figura 3.1, sendo  $\delta$  a distância de  $P_1P_2$ .

Figura 3.1 – Distância  $\delta$  entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Nessas condições, tem-se que

$$\delta^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$$

$$\delta = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Por outro lado, lembrando-se do que estudamos no Capítulo 1, a expressão 1.7 determina que

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

e, pelo conceito de módulo, estabelecido pela expressão 1.26, pode-se afirmar que

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Logo, a distância,  $\delta$ , entre dois pontos é equivalente a

$$\delta = |z_1 - z_2|.$$

□

**Aplicação 2.** (NEVES, 2014) Determinar o ponto médio do segmento definido pelos pontos  $P_1(a, b)$  e  $P_2(c, d)$ .

*Solução.* Tomemos  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$  como os correspondentes aos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. Chamaremos o ponto médio de  $\overline{P_1P_2}$  de  $M$  e o complexo a ele associado de  $z_m$ . Nessas condições, podemos afirmar que

$$\overrightarrow{P_1M} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$M - P_1 = \frac{1}{2} \cdot (P_2 - P_1)$$

$$z_m - z_1 = \frac{1}{2} \cdot (z_2 - z_1)$$

$$z_m - z_1 = \frac{z_2}{2} - \frac{z_1}{2}$$

$$z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Mais do que isso,

$$z_m = \frac{a + bi + c + di}{2}$$

$$z_m = \left(\frac{a + c}{2}\right) + \left(\frac{b + d}{2}\right)i.$$

Por consequência, tem-se que o ponto médio do segmento é

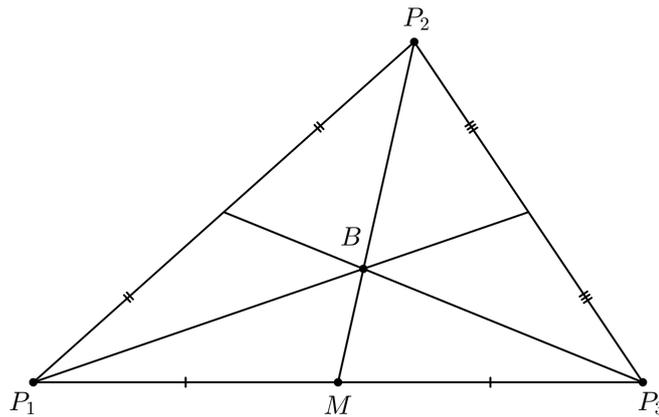
$$M\left(\frac{a + c}{2}, \frac{b + d}{2}\right).$$

□

**Aplicação 3.** (NEVES, 2014) Determinar o baricentro<sup>1</sup> do triângulo cujos vértices são  $P_1(a_1, b_1)$ ,  $P_2(a_2, b_2)$  e  $P_3(a_3, b_3)$ .

*Solução.* Consideremos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  os números correspondentes a  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , respectivamente. Além disso, vamos definir  $M$  como o ponto médio de  $\overline{P_1P_3}$  e  $B$  o baricentro do triângulo, respectivas imagens de  $z_m$  e  $z_b$  (veja a Figura 3.2).

Figura 3.2 – Baricentro do triângulo  $P_1P_2P_3$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Lembremo-nos que, em um triângulo qualquer, o comprimento de  $\overline{MB}$  é a terça parte do comprimento da mediana correspondente,  $\overline{MP_2}$ . Logo,

$$\overrightarrow{MP_2} = 3 \cdot \overrightarrow{MB}$$

$$P_2 - M = 3 \cdot (B - M)$$

$$z_2 - z_m = 3 \cdot (z_b - z_m),$$

que implica em

$$z_b = \frac{1}{3} \cdot (2z_m + z_2).$$

Pelas conclusões da Aplicação 2,

$$z_b = \frac{1}{3} \cdot (z_1 + z_2 + z_3),$$

que leva em

$$z_b = \left( \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right) + \left( \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \right) i.$$

Por consequência, o baricentro do triângulo é

$$B \left( \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \right).$$

□

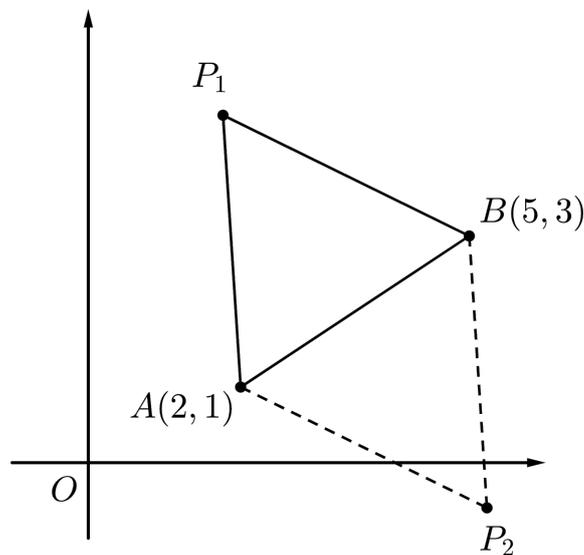
<sup>1</sup> O baricentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três medianas.

## 3.2 Terceiro vértice de um triângulo

**Aplicação 4.** Dados dois vértices de um triângulo equilátero,  $A(2,1)$  e  $B(5,3)$ , determine o ponto que representa o terceiro vértice desse triângulo.

*Solução.* Bem, primeiramente podemos tomar os pontos  $A$  e  $B$  como imagens de  $z_1 = 2 + i$  e  $z_2 = 5 + 3i$ , respectivamente. Além disso, vamos definir um vetor  $\vec{AB}$ , correspondente a um terceiro número complexo.

Figura 3.3 – Terceiro vértice de um triângulo equilátero



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Assim sendo, perceba que uma maneira de encontrar o vértice desse triângulo é realizando em  $\vec{AB}$  uma rotação de  $60^\circ$  no sentido positivo do ciclo trigonométrico, mantendo sua origem em  $A$  e assumindo como nova extremidade um ponto  $P_1$  (veja a Figura 3.3), imagem de um complexo  $a + bi$ . Isso porque um triângulo equilátero tem seus ângulos internos de  $60^\circ$  e lados congruentes.

Para realizarmos essa rotação, basta multiplicarmos o número correspondente ao vetor  $\vec{AB}$  pelo complexo unitário de argumento  $60^\circ$  ou  $\frac{\pi}{3}$  rad. Logo,

$$\vec{AP_1} = \vec{AB} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)$$

$$P_1 - A = (B - A) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$(a + bi) - (2 + i) = [(5 + 3i) - (2 + i)] \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$(a-2) + (b-1)i = (3+2i) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$(a-2) + (b-1)i = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i + i - \sqrt{3}$$

$$(a-2) + (b-1)i = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1\right)i.$$

Se dois números complexos na forma algébrica são iguais, significa que possuem partes reais iguais e partes imaginárias iguais também. Assim,

$$\begin{cases} a-2 = \frac{3}{2} - \sqrt{3} \\ b-1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7-2\sqrt{3}}{2} \\ b = \frac{4+3\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Isso significa que o ponto procurado é a imagem do número complexo

$$z = \frac{7-2\sqrt{3}}{2} + \frac{4+3\sqrt{3}}{2}i,$$

ou seja,

$$P_1 \left( \frac{7-2\sqrt{3}}{2}, \frac{4+3\sqrt{3}}{2} \right).$$

Porém, note que  $P_1$  não é a única solução. Em vez de rotacionarmos  $\overrightarrow{AB}$  no sentido anti-horário, poderíamos ter feito o mesmo com  $\overrightarrow{BA}$ , encontrando um ponto  $P_2$ . Sendo assim, de maneira análoga, chegaríamos em

$$P_2 \left( \frac{7+2\sqrt{3}}{2}, \frac{4-3\sqrt{3}}{2} \right).$$

□

**Aplicação 5.** Suponha que  $A(-2, 4)$  e  $B(4, -4)$  são vértices de um triângulo isósceles de base  $AB$ . Determine a coordenada do terceiro vértice desse triângulo, sabendo que o módulo dos lados congruentes é igual a  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ .

*Solução.* Para resolvermos esse problema, considere  $P_1$  a imagem de um complexo  $z = a + bi$  e o terceiro vértice do triângulo isósceles  $ABP_1$ . Como seus lados congruentes não possuem necessariamente o mesmo módulo que a base  $\overline{AB}$ , precisaremos descobrir algumas medidas nesse triângulo. Primeiramente, considerando que os pontos  $A$  e  $B$  são as imagens de  $z_1 = -2 + 4i$  e  $z_2 = 4 - 4i$ , respectivamente, vamos investigar o comprimento de sua base.

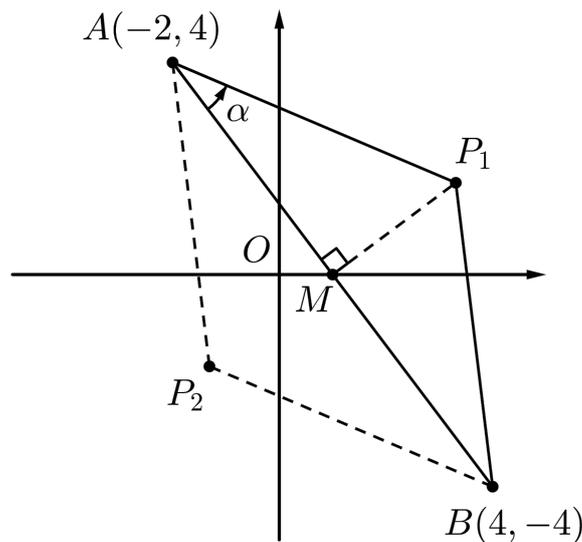
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4 - 4i) - (-2 + 4i) = 6 - 8i = w.$$

Logo,

$$|w| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Podemos então pensar em realizar uma rotação no vetor  $\vec{AB}$ , assim como na Aplicação 4 e descobrir a coordenada de  $P_1$ . Para tanto, é necessário perceber que o comprimento da base  $\overline{AB}$  é maior que a medida dos outros lados e, além disso, não sabemos o valor do ângulo em que o vetor deverá ser rotacionado. Assim sendo, devemos descobrir o valor  $\alpha$  dos ângulos congruentes desse triângulo e realizar uma contração em  $\vec{AB}$ . A Figura 3.4 auxiliará a interpretação do problema.

Figura 3.4 – Terceiro vértice de um triângulo isósceles



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Seja  $M$  o ponto médio da base de  $ABP_1$ , então  $|\overline{AM}| = 5$  e

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP_1}} = \frac{5}{\frac{10\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Para realizarmos a rotação de  $\vec{AB}$ , multiplicaremos  $w$  por um complexo de argumento igual a  $30^\circ$ , ou  $\frac{\pi}{6}$  rad, e módulo  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , para que  $AP_1$  tenha comprimento  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$  e seja feita a devida contração. Assim,

$$\begin{aligned} \vec{AP_1} &= \vec{AB} \cdot \left[ \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ P_1 - A &= (6 - 8i) \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right] \\ (a + bi) - (-2 + 4i) &= 3 + i\sqrt{3} - 4i + \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ (a + 2) + (b - 4)i &= \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} + 3 \right) + (\sqrt{3} - 4)i. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} a+2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 3 \\ b-4 = \sqrt{3} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3+4\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Dessa forma, o ponto que procuramos é a imagem do número

$$z = \frac{3+4\sqrt{3}}{3} + i\sqrt{3},$$

ou seja,

$$P_1 \left( \frac{3+4\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} \right).$$

Poderíamos também encontrar um segundo ponto  $P_2$  que satisfaz as condições do problema. Bastaria realizarmos, de maneira análoga, o processo utilizando o vetor  $\vec{BA}$  em vez de  $\vec{AB}$ . Com isso, chegaríamos em

$$P_2 \left( \frac{3-4\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3} \right).$$

□

### 3.3 Vértices de um polígono regular

**Aplicação 6.** Determinar as coordenadas dos vértices de um hexágono regular inscrito em uma circunferência centrada na origem, em que  $P_1(1, \sqrt{3})$  é um desses vértices.

*Solução.* Tome  $P_1$  como a imagem de  $s_1 = 1 + i\sqrt{3}$ . Pelo Teorema 2.5, as imagens das raízes enésimas de um valor são vértices de um polígono regular de  $n$  lados. Como nosso objetivo envolve um hexágono, é válido supor que  $s$  é uma das raízes sextas de algum número  $z$  e convém descobrir essa resposta. Assim, pela Definição 2.1,  $(s_1)^6 = z$  ou

$$(1 + i\sqrt{3})^6 = z.$$

Colocando  $s_1$  na forma polar, poderemos descobrir facilmente o valor de  $z$ .

$$s_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right).$$

Pelo Teorema 2.1,

$$(s_1)^6 = 2^6 \cdot \left[ \cos \left( 6 \cdot \frac{\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left( 6 \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$(s_1)^6 = 64 \cdot [1 + 0i] = 64 = z,$$

que leva em

$$z = 64(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0).$$

Assim, os vértices desse hexágono serão as imagens das raízes sextas de 64. Lembrando-se do Teorema 2.3, temos que

$$s = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$s = \sqrt[6]{64} \left( \cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{0 + 2k\pi}{6} \right)$$

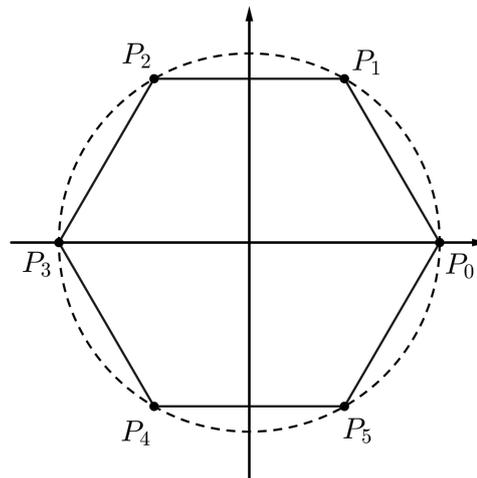
$$s = \sqrt[6]{64} \left( \cos \frac{k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{3} \right).$$

Vamos agora supor valores inteiros para  $k$ .

- Para  $k = 0$ , tem-se  $s_0 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2$ ;
- Para  $k = 1$ , é simples verificar que obteríamos  $s_1$ ;
- Para  $k = 2$ , tem-se  $s_2 = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3}$ .

Poderíamos descobrir, com esse processo, as outras três raízes. Porém, basta perceber que cada vértice desse hexágono terá um outro correspondente que é simétrico em relação à origem. Sendo assim,  $s_3 = -2$ ,  $s_4 = -1 - i\sqrt{3}$  e  $s_5 = 1 - i\sqrt{3}$ . Portanto, os seus vértices serão  $P_0(2, 0)$ ,  $P_1(1, \sqrt{3})$ ,  $P_2(-1, \sqrt{3})$ ,  $P_3(-2, 0)$ ,  $P_4(-1, -\sqrt{3})$  e  $P_5(1, -\sqrt{3})$  e suas representações estão ilustradas na Figura 3.5.  $\square$

Figura 3.5 – Raízes sextas de 64



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

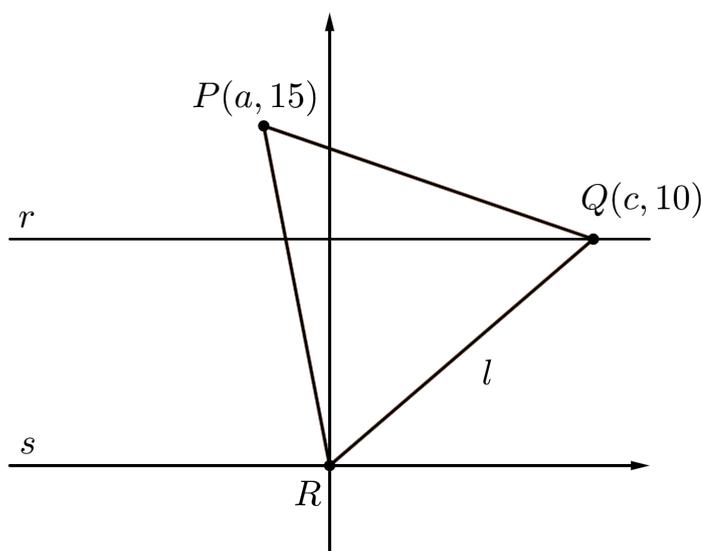
### 3.4 Área e perímetro

**Aplicação 7.** (ITA, 2008) Sejam  $r$  e  $s$  duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja  $P$  um ponto no plano definido por  $r$  e  $s$  e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de  $r$ .

As respectivas medidas da área e do perímetro, em  $\text{cm}^2$  e  $\text{cm}$ , do triângulo equilátero  $PQR$  cujos vértices  $Q$  e  $R$  estão, respectivamente, sobre as retas  $r$  e  $s$ , são iguais a [...].

*Solução.* Primeiramente, considere um sistema de coordenadas com eixo horizontal coincidente à reta  $r$  de maneira que o vértice  $R$  seja a origem. Nessas condições, podemos afirmar que a Figura 3.6 ilustra adequadamente o problema proposto.

Figura 3.6 – Triângulo equilátero  $PQR$  em um sistema de coordenadas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Desejamos descobrir os valores da área e do perímetro de  $PQR$ . Para tanto, basta encontrarmos o valor de seu lado  $l$ . Considere  $P$ ,  $Q$  e  $R$  as imagens de  $z_1 = a + 15i$ ,  $z_2 = c + 10i$  e  $z = 0$ , respectivamente. Note que o vetor  $\vec{RP}$  pode ser obtido realizando-se uma rotação positiva de  $\frac{\pi}{3}$  rad em  $\vec{RQ}$ . Sendo assim,

$$\begin{aligned}\vec{RP} &= \vec{RQ} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) \\ P - R &= (Q - R) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ (a + 15i) - 0 &= [(c + 10i) - 0] \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ a + 15i &= [c + 10i] \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ a + 15i &= \frac{c}{2} + \frac{c\sqrt{3}}{2}i + 5i + -5\sqrt{3} \\ a + 15i &= \left( \frac{c}{2} - 5\sqrt{3} \right) + \left( \frac{c\sqrt{3}}{2} + 5 \right) i.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} a = \frac{c}{2} - 5\sqrt{3} \\ 15 = \frac{c\sqrt{3}}{2} + 5 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow z_2 = \frac{20\sqrt{3}}{3} + 10i.$$

Dessa forma,

$$|\vec{RQ}| = |z_2 - z_3| = \left| \left( \frac{20\sqrt{3}}{3} + 10i \right) - 0 \right| = \sqrt{\left( \frac{20\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 10^2} = \frac{10\sqrt{21}}{3} = l.$$

Conhecendo-se o valor do lado de  $PQR$ , temos que

$$2P = 3 \cdot \frac{10\sqrt{21}}{3} = 10\sqrt{21} \text{ cm.}$$

Além disso, sabendo que, em um triângulo equilátero, o valor da área é

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4},$$

concluimos que

$$A = \left( \frac{10\sqrt{21}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{175\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2.$$

□

### 3.5 Condição para que um triângulo seja equilátero

Pretendemos abordar nesta seção uma condição que precisa ser obedecida para que três pontos sejam vértices de um triângulo equilátero, utilizando conceitos do conteúdo de números complexos. Porém, antes disso, façamos algumas considerações à respeito das raízes cúbicas da unidade, que darão sentido a algumas verificações que realizaremos.

Bem, se  $s$  é uma raiz cúbica de 1, então  $s^3 = 1$  e

$$s = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}.$$

Daí temos que

- $k = 0 \Rightarrow s_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$ ;
- $k = 1 \Rightarrow s_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w$ ;
- $k = 2 \Rightarrow s_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w^2$ .

Os três valores são complexos unitários. Para ter certeza que  $s_2$  é de fato igual a  $w^2$ , basta ver que  $\arg(s_2) = 2 \cdot \arg(w)$ . Além disso, podemos fazer algumas considerações importantes sobre esses valores. Primeiramente, é simples ver que

$$1 + w + w^2 = 0. \quad (3.1)$$

Outra observação é que  $w$  é o número que multiplicaríamos um valor para que sua imagem fosse rotacionada em  $120^\circ$ . Isso porque  $|w| = 1$  e  $\arg(w) = \frac{2\pi}{3}$ . E, por fim, quanto às potências de base  $w$ , algo que pode ser percebido é que  $w^n$ , para um inteiro  $n$  qualquer, sempre assume valores equivalentes a  $1$ ,  $w$  ou  $w^2$ . A verificação disso pode ser feita de maneira análoga ao que foi feito no Teorema 1.1. Como exemplo,  $w^3 = 1$  e  $w^4 = w$ .

**Aplicação 8.** (FEITOSA, 2013) Provar que um triângulo  $P_1P_2P_3$  qualquer é equilátero se e somente se  $z_1 + z_2w + z_3w^2 = 0$ , sendo  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  os números complexos correspondentes a  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , respectivamente.

*Demonstração.* Primeiramente, vamos considerar como hipótese que o triângulo é equilátero. Logo, pode-se afirmar que  $\overrightarrow{P_1P_3}$  é uma rotação positiva de  $60^\circ$  de  $\overrightarrow{P_1P_2}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_3} &= \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) \\ P_3 - P_1 &= (P_2 - P_1) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ z_3 - z_1 &= \frac{1}{2}z_2 + \frac{i\sqrt{3}}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_1 - \frac{i\sqrt{3}}{2}z_1 \\ z_3 - z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{i\sqrt{3}}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_1 + \frac{i\sqrt{3}}{2}z_1 &= 0 \\ z_3 + z_2 \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + z_1 \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) &= 0 \\ z_3 + z_2w^2 + z_1w &= 0 \end{aligned}$$

ou ainda, multiplicando-se essa equação por  $w^2$ ,

$$\begin{aligned} z_3w^2 + z_2w^4 + z_1w^3 &= 0 \\ z_1 + z_2w + z_3w^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

que demonstra a primeira parte.

Agora, deveríamos considerar que, se em um triângulo  $P_1P_2P_3$  qualquer, a relação 3.2 acontece, então ele é equilátero. Todavia, precisaríamos apenas realizar o mesmo procedimento partindo da conclusão e chegando em

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$$

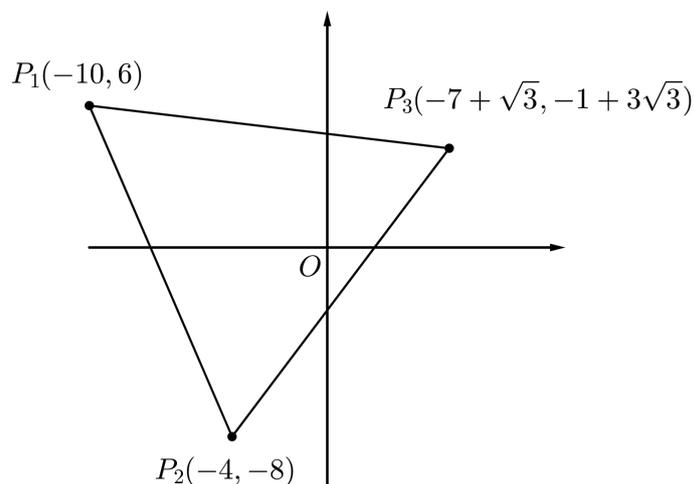
e, de maneira análoga, poderíamos provar que  $\overrightarrow{P_3P_2}$  é um rotação positiva de  $60^\circ$  de  $\overrightarrow{P_3P_1}$ . Vale salientar que essa relação é válida desde que a ordem dos vértice esteja no sentido anti-horário.  $\square$

**Aplicação 9.** Verifique se os pontos  $P_1(-10, 6)$ ,  $P_2(-4, -8)$  e  $P_3(-7 + 7\sqrt{3}, -1 + 3\sqrt{3})$  definem um triângulo equilátero.

*Solução.* Note que  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  estão organizados, nessa ordem, de maneira anti-horária, conforme ilustra a Figura 3.7. Tomando  $z_1 = -10 + 6i$ ,  $z_2 = -4 - 8i$  e  $z_3 = -7 + 7\sqrt{3} + (-1 + 3\sqrt{3})i$ , podemos verificar se esses pontos definem um triângulo equilátero com o critério estudado na Aplicação 8, ou seja, procuramos saber se

$$z_1 + z_2w + z_3w^2 = 0.$$

Figura 3.7 – Triângulo  $P_1P_2P_3$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Primeiramente,

$$z_2w = (-4 - 8i) \cdot \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$z_2w = (2 + 4\sqrt{3}) + (4 - 2\sqrt{3})i.$$

Também,

$$z_3 w^2 = [-7 + 7\sqrt{3} + (-1 + 3\sqrt{3})i] \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_3 w^2 = (8 - 4\sqrt{3}) + (-10 + 2\sqrt{3})i.$$

Assim,

$$z_1 + z_2 w + z_3 w^2$$

$$= (-10 + 6i) + 2 + 4\sqrt{3} + (4 - 2\sqrt{3})i + 8 - 4\sqrt{3} + (-10 + 2\sqrt{3})i$$

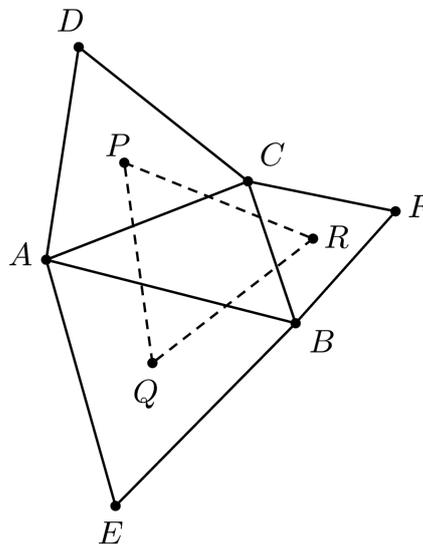
$$= 0.$$

Portanto,  $P_1 P_2 P_3$  é equilátero. □

## 3.6 Teorema de Napoleão

**Aplicação 10.** (FEITOSA, 2013) Prove que, em triângulo equilátero  $ABC$  qualquer, se forem construídos triângulos equiláteros em cada um de seus lados, então os seus ortocentros serão vértices de um triângulo equilátero<sup>2</sup>.

Figura 3.8 – Ilustração do teorema de Napoleão



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

*Demonstração.* Queremos provar que o triângulo  $PQR$  é equilátero (ver Figura 3.8). Utilizaremos nesta seção a mesma notação para o ponto e o número complexo associado a ele, a fim de evitar

<sup>2</sup> Normalmente atribuído ao francês Napoleão Bonaparte (1769-1821), esse teorema pode ser demonstrado de maneira bela e simples utilizando-se os conceitos de números complexos. Além disso, a abordagem utilizada para essa demonstração torna-a mais simples de ser feita do que por geometria plana.

excessos. Dessa forma, conforme abordado na Aplicação 8, o que desejamos é mostrar que

$$P + Qw + Rw^2 = 0.$$

Primeiramente, podemos notar um trio de equações verdadeiras baseadas na hipótese do enunciado, que são

$$\begin{cases} D + Aw + Cw^2 = 0 \\ A + Ew + Bw^2 = 0 \\ C + Bw + Fw^2 = 0 \end{cases} .$$

Além disso, pelos resultados da Aplicação 3, a expressão

$$P + Qw + Rw^2$$

pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \frac{A+C+D}{3} + \left(\frac{B+A+E}{3}\right)w + \left(\frac{C+B+F}{3}\right)w^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot (A + C + D + Bw + Aw + Ew + Cw^2 + Bw^2 + Fw^2). \end{aligned}$$

Organizando de uma maneira mais interessante, temos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \cdot [(D + Aw + Cw^2) + (A + Ew + Bw^2) + (C + Bw + Fw^2)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$P + Qw + Rw^2 = 0$$

e  $PQR$  é equilátero.

□

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em pensamento aos argumentos que justificam este trabalho, chegou-se a conclusão de que o estudo dos números complexos promove um complemento às operações e procedimentos da matemática, enriquecendo essa ciência e gerando novas aplicações em diversos ramos. Além disso, relacionar os complexos com geometria faz-se pertinente, uma vez que os conteúdos matemáticos tendem a se correlacionar.

Nesse contexto, a pesquisa teve como objetivo geral investigar pertinentes associações entre esses dois conteúdos, que foi atendido ao promovermos nos três capítulos interpretações que demonstram a íntima relação entre esses conteúdos, juntamente com as aplicações realizadas no Capítulo 3.

Em contrapartida, objetivos específicos foram traçados. O primeiro deles foi fazer uma contextualização histórica do desenvolvimento do conjunto dos números complexos, a fim de proporcionar maior compreensão do tema, que foi cumprido ao realizarmos investigações da história que concernem ao tema nas duas primeiras seções do Capítulo 1. Visitou-se a relação do ser humano com os números e episódios que culminaram em justificar a definição dos complexos.

O segundo objetivo específico determinado foi realizar um estudo, por meio de pesquisa bibliográfica, dos principais conceitos, relacionados aos complexos, necessários às aplicações geométricas, investigando as propriedades e relações estabelecidas com formas algébrica e polar do número. Cumprimos esse objetivo ao longo dos dois primeiros capítulos, estudando definições, demonstrando teoremas e resolvendo exemplos que compõem esse tema.

Como último objetivo específico traçado, propomos realizar escrita de trabalho científico, a fim de divulgar os resultados alcançados, que faz-se cumprido com a finalização deste trabalho, sendo esperado que o mesmo sirva de material fonte para compreensão de conceitos científicos.

A pesquisa realizada partiu da hipótese de que problemas normalmente trabalhados em geometria podem ser solucionados com a ótica dos complexos. No Capítulo 3, resolvemos problemas desse tipo, por meio dos conceitos estudados desses números, confirmando a veracidade da hipótese inicial e respondendo o questionamento de como essas aplicações poderiam ser feitas.

As dificuldades e limitações enfrentadas em relação à escolha da metodologia, que é de uma pesquisa exploratória bibliográfica, e do tema foram a necessidade de reunir um vasto material científico como referência para embasamento da pesquisa e o desafio em abordar conteúdos que são, muitas vezes, abordados em um nível superior ao pretendido neste trabalho de maneira simples.

Dessa maneira, recomenda-se aos que objetivam realizar produções científicas sobre esse tema, reunir anteriormente dissertações e livros que abordam de maneira completa os números complexos e os relacionam com a geometria, a fim de estabelecer uma estratégia que visa abordá-los com a formalidade adequada do trabalho.

# REFERÊNCIAS

- ANDREESCU, T.; ANDRICA, D. *Complex numbers from a to...z*. 2. ed. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 2006.
- AVILA, G. *Variáveis complexas e aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e aplicações*. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.
- CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria/Números complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- FEITOSA, L. F. *Aplicações dos números complexos na geometria plana*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, abr. 2013.
- GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas*. 4. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- ITA. *Provas anteriores*. 2008. Disponível em: <[http://www.vestibular.ita.br/provas/matematica\\_2008.pdf](http://www.vestibular.ita.br/provas/matematica_2008.pdf)>. Acesso em: 20 fev. 2022.
- KATZ, V. J. *A history of mathematics: an introduction*. 3. ed. New York: Pearson Education, 2009.
- NAHIN, P. J. *An imaginary tale : the story of [the square root of minus one]*. Princeton: Princeton University Press, 1998.
- NEVES, R. C. *Aplicações de números complexos em geometria*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional De Matemática Pura E Aplicada, Rio de Janeiro, fev. 2014.
- RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SIQUEIRA, J. F. P. da. *Números racionais, reais e complexos*. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.
- ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- SILVA, V. V. da. *Números: construção e propriedades*. 1. ed. Goiânia: UFG, 2003.
- STEWART, I. *Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos*. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.
- STEWART, J. *Cálculo, volume I*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

