

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
Câmpus Central - Sede: Anápolis - CET
Curso de Matemática

**Geometria da Curva Catenária Utilizando Conceitos de Cálculo Diferencial
e Integral**

LILLIAN MOREIRA PIRES

Anápolis

2022

LILLIAN MOREIRA PIRES

**Geometria da Curva Catenária Utilizando Conceitos de Cálculo Diferencial
e Integral**

Trabalho de Curso (TC) apresentado, à Coordenação Setorial do Curso de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Graduado no Curso de Matemática da Universidade Estadual de Goiás sob a orientação do Prof. Me. Tiago de Lima Bento Pereira.

Orientador: Prof. Me. Tiago de Lima Bento Pereira

Anápolis

2022

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UEG
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P667g Pires, Lillian Moreira
 Geometria da Curva Catenária Utilizando Conceitos de
 Cálculo Diferencial e Integral / Lillian Moreira
 Pires; orientador Tiago de Lima Bento Pereira. --
 Anápolis, 2022.
 54 p.

 Graduação - Matemática -- Câmpus Central - Sede:
 Anápolis - CET, Universidade Estadual de Goiás, 2022.

 1. Catenária. 2. Curvas. 3. GeoGebra. 4. Círculo
 Osculador. I. Pereira, Tiago de Lima Bento, orient. II.
 Título.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS CENTRAL – SEDE: ANÁPOLIS - CET

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO DE MONOGRAFIAS
DIGITAIS NO BANCO DE DADOS DO CÂMPUS CENTRAL – SEDE: ANÁPOLIS - CET

Eu Lillian Moreira Pires

Curso Matemática - Licenciatura

Na qualidade de titular dos direitos de autor que recaem sobre a minha monografia de
Conclusão de Curso, intitulada Geometria da Curva Catenária Utilizando Conceitos de
Cálculo Diferencial e Integral.

Defendida em 16 / 03 / 2022, junto à banca examinadora do curso com
fundamento nas disposições da lei nº 9.610 de 19 de fevereiro de 1998, autorizo a
disponibilizar gratuitamente a obra citada, sem ressarcimento de direitos autorais, para fins de
impressão e/ou *downloading* pela *internet*, a título de divulgação da produção científica
gerada pela Universidade Estadual de Goiás / Câmpus Central – SEDE: Anápolis - CET, a
partir desta data.

(X) autorizo texto (completo)

() autorizo parcial (resumo)

Assim, autorizo a liberação total ou resumo de meu trabalho, estando ciente que o conteúdo
disponibilizado é de minha inteira responsabilidade.

Anápolis, 24 de Março de 2022

Assinatura do autor

Lillian Moreira Pires

Assinatura do orientador

Diogo de Lima Bento Pereira

Universidade
Estadual de
Goiás



ESTADO DE GOIÁS
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - UEG
COORDENAÇÃO SETORIAL MATEMÁTICA ANÁPOLIS

LILLIAN MOREIRA PIRES

ANÁLISE DA CATENÁRIA: CONCEITOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Trabalho de Curso II de Matemática apresentado à Banca Examinadora como parte dos requisitos para a obtenção do grau de graduado em Licenciatura em Matemática.

Aprovado com sugestão de alteração no título. Banca Examinadora do Trabalho de Curso II do curso de Matemática do Campus Central: Sede - Anápolis - CET da Universidade Estadual de Goiás.

Anápolis - Goiás, 16 de março de 2022.

Me. Tiago de Lima Bento Pereira
Orientador(a)/Presidente da banca examinadora

Dra. Selma Marques de Paiva
1º Membro da Banca Examinadora

Dr. Leonardo Antônio Souto
2º Membro da Banca Examinadora



Documento assinado eletronicamente por **TIAGO DE LIMA BENTO PEREIRA, Docente de Ensino Superior**, em 19/03/2022, às 12:42, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



Documento assinado eletronicamente por **LEONARDO ANTONIO SOUTO, Docente de Ensino Superior**, em 22/03/2022, às 14:21, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



Documento assinado eletronicamente por **SELMA MARQUES DE PAIVA, Docente de Ensino Superior**, em 22/03/2022, às 16:59, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



A autenticidade do documento pode ser conferida no site
http://sei.go.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=1 informando o código verificador
000028489479 e o código CRC 464349B8.

COORDENAÇÃO SETORIAL MATEMÁTICA ANÁPOLIS
RODOVIA BR 153 S/Nº - Bairro ZONA RURAL - CEP 75132-903 - ANAPOLIS - GO
0- QUADRA ÁREA KM 99 (62)3328-1139



Referência: Processo nº 202200020004306



SEI 000028489479

*Este trabalho é dedicado à Deus,
às pessoas mais importantes da minha vida:
minha família.
Mãe, Willian, Camila, Anna e Denilson.
Amo muito vocês.
E à memória da minha avó, Maria da Penha.*

AGRADECIMENTOS

À Deus e à Nossa Senhora Aparecida, que sempre estiveram comigo, me guiando em todos os momentos e conduzindo a superar cada dificuldade encontrada no caminho.

À minha mamãe Geny, que sempre fez de tudo para que eu pudesse completar o curso, me apoiando, incentivando e compreendendo minha ausência para que este momento chegasse.

À todos da minha família, meu irmão Willian, minha cunhada Camila e minha sobrinha Anna, que de alguma forma contribuíram para esta realização. Em especial, a memória da minha avó Penha, que não mediu esforços para que eu chegasse até aqui.

Ao meu noivo Denilson que sempre esteve comigo, me amparando e me ajudando na caminhada.

Aos meus amigos que o curso me presenteou, aos que me apoiaram, me ouviram, me deram conselhos nos momentos mais difíceis e sempre estiveram comigo.

Aos meus professores, que tanto me ensinaram, que proporcionaram o meu desenvolvimento profissional, sem eles nada disso teria acontecido.

Ao meu orientador, Tiago, pela paciência, por sempre estar presente, me auxiliando no decorrer do trabalho e me ajudando a acreditar que era possível.

*"Onde você está é resultado de quem você era,
mas para onde você vai depende inteiramente de quem você escolhe ser."
(Hal Elrod)*

RESUMO

A catenária é uma curva que sustenta seu próprio peso e, por anos, foi confundida com a parábola. Está presente, principalmente, nas redes de transmissão de energia elétrica e nas pontes pênsis. O objetivo é a análise da catenária, considerando conceitos de geometria diferencial e o uso do software GeoGebra para visualização, análise e compreensão. Desenvolve-se a equação da catenária, utilizando um problema de valor inicial, e algumas propriedades, entre elas o comprimento de arco da catenária, dados dois pontos e a função curvatura. Fazendo uso de uma das equações paramétricas, construiu-se a equação do círculo osculador, em um ponto arbitrário, utilizando o módulo do vetor normal à catenária.

Palavras-chave: Catenária. Curvas. GeoGebra. Círculo Osculador.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 0.1 – Catenárias	19
Figura 1.1 – Anotações de Huygens.	21
Figura 1.2 – Anotações de Leibniz	22
Figura 1.3 – Desafio da catenária	22
Figura 1.4 – Gráfico da Curva Catenária	23
Figura 1.5 – Ponte Golden Gate	24
Figura 1.6 – Arcos catenários da Casa Milà	24
Figura 2.1 – Rede Elétrica no rio Corumbá IV	27
Figura 2.2 – Curva Catenária	28
Figura 2.3 – Curva Catenária	28
Figura 2.4 – Gráfico da Curva Catenária	33
Figura 3.1 – Gráfico do Comprimento de Arco na Catenária	37
Figura 3.2 – Gráfico da Curvatura da Catenária	39
Figura 3.3 – Gráfico da Função Curvatura	39
Figura 3.4 – Gráfico do Círculo Osculador da Catenária no Ponto Mínimo	40
Figura 3.5 – Gráfico dos Vetores na Curva Catenária	41
Figura 3.6 – Gráfico do Círculo Osculador	43
Figura B.1 – Gráfico da Curvatura da Catenária	54

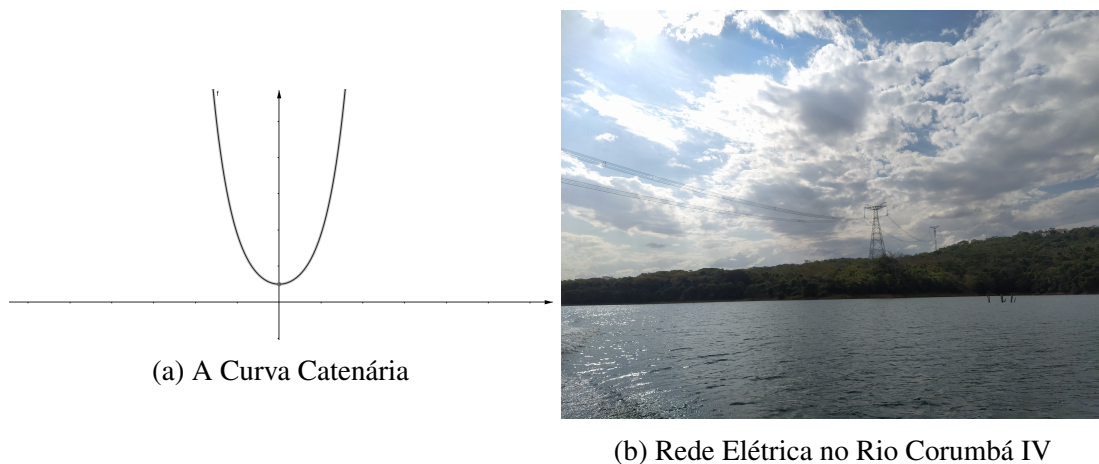
SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	19
1	CONTEXTO HISTÓRICO	21
2	A EQUAÇÃO DA CATENÁRIA	27
2.1	Equação (Diferencial) da Catenária	28
2.2	Equação da Catenária	30
3	ESTUDO DA CATENÁRIA	35
3.1	Comprimento de arco da Catenária	35
3.2	Curvatura da Catenária	37
3.3	Raio de Curvatura e Círculo Osculador	39
3.3.1	Círculos Osculador da Catenária	40
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
	REFERÊNCIAS	47
	APÊNDICES	49
	APÊNDICE A – EQUAÇÃO PARAMÉTRICA DA CATENÁRIA . . .	51
	APÊNDICE B – CURVATURA DA CATENÁRIA	53

INTRODUÇÃO

A catenária é uma curva plana, determinada por um cabo suspenso por suas extremidades e, que sustenta seu próprio peso. A palavra catenária significa corrente e vem do latim *catena*. Devido à vasta aplicabilidade resolveu-se realizar um estudo a respeito de tal curva. Esta curva é encontrada em obras arquitetônicas, nos cabos de torre de transmissão, nas extremidades do ovo, em pontes pênses, entre muitos outros lugares. A Figura 0.1a exibe a curva catenária e a Figura 0.1b exibe a catenária nos arcos da rede de alta tensão no Rio Corumbá IV.

Figura 0.1 – Catenárias



(a) A Curva Catenária

(b) Rede Elétrica no Rio Corumbá IV

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

O objetivo principal deste trabalho é a análise da catenária, considerando conceitos de geometria diferencial e o uso do *software* GeoGebra para visualização, análise e compreensão. Destaca-se a dedução da equação do círculo osculador em um ponto qualquer da catenária. Para isto foi realizada uma revisão bibliográfica, buscando a concepção histórica, a dedução da equação da catenária e utilizar os conceitos da geometria diferencial para estudar a catenária em vários aspectos, tais como a equação paramétrica, o comprimento de arco, a curvatura, o raio de curvatura e o círculo osculador.

O Capítulo 1 aborda o contexto histórico. Inicia-se por volta do século XVII com Galileu Galilei supondo que a curva, formada por uma corda suspensa nas suas extremidades, era uma parábola. Passa-se pelo surgimento da definição da equação do cosseno hiperbólico - que anos depois se tornou a definição da equação da catenária e conclui-se exibindo aplicações.

No Capítulo 2 desenvolve-se a equação da catenária. Partindo das considerações físicas, e geométricas. Considerando o ponto mínimo da catenária na interseção da curva com o eixo y , deduziu-se a equação diferencial da catenária e, posteriormente, construiu-se a equação da catenária.

No Capítulo 3 apresenta-se e desenvolve-se conceitos da geometria diferencial utilizando a catenária. A partir da função definida pelo cosseno hiperbólico determina-se uma parametrização para a catenária. Utilizando a parametrização calcula-se as fórmulas para o comprimento de arco e para a função curvatura, em qualquer ponto. Utilizando a função curvatura define-se ao raio de curvatura. Diante disso foi possível encontrar o círculo osculador da catenária no ponto mínimo. Ressalta-se a utilização do software GeoGebra e a subseção 3.3.1 onde desenvolve-se a equação do círculo osculador em qualquer ponto da catenária.

1 CONTEXTO HISTÓRICO

Para Boyer (2012) o século XVII é considerado o século das curvas - da cicloide, do limaçon, da catenária, da lemniscata, da espiral equiangular, das hipérbolas, parábolas e espirais de Fermat, além das pérolas de Sluse e muitas outras.

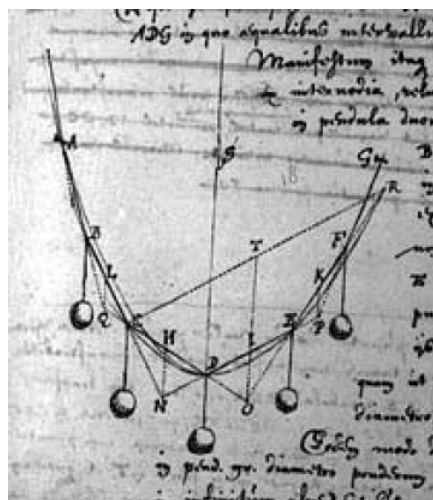
A catenária é uma palavra cuja origem vem do latim *catena* e significa corrente ou cadeia que de acordo com Eves (2011), é uma curva determinada por um cabo suspenso nas suas extremidades, perfeitamente flexível e inextensível, sujeita apenas à força da gravidade. Esta curva teve seu estudo iniciado com o matemático Galileu Galilei¹ que propôs como a representação de uma parábola.

Galileu, erradamente supôs ter encontrado outra aplicação da parábola na curva de suspensão de uma corda ou corrente (catena) flexível, mas mais tarde, ainda no mesmo século, os matemáticos demonstraram que essa curva, a catenária, não só não é uma parábola como nem sequer é álgebra. (BOYER, 2012)

Em 1646, Christian Huygens provou que não seria uma parábola, mas o problema foi revisado e concluído apenas quarenta e quatro anos depois, em 1691, por quatro matemáticos: Huygens, Leibniz, Jacques Bernoulli e seu irmão Jean Bernoulli (MENDES, 2017).

Segundo Boyer (2012), Huygens mostrou que a catenária é uma curva não algébrica, mas não demonstrou a fórmula, utilizava uma noção mais geométrica. A Figura 1.1 exibe um esboço ilustrando a forma do matemático de observar a catenária.

Figura 1.1 – Anotações de Huygens.

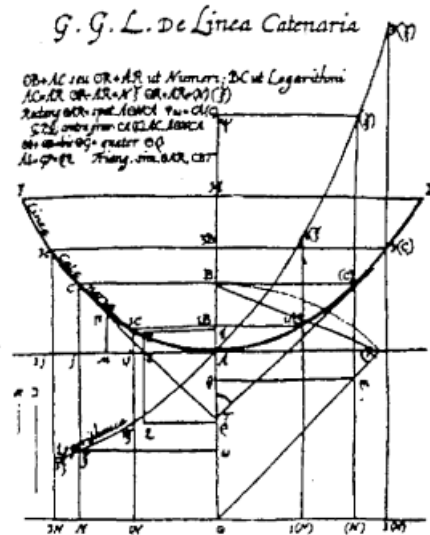


Fonte: Nunes (2016) *apud* Mendes (2017).

¹ ★ 1564 - † 1642

O filósofo, teólogo, cientista, matemático e diplomata, Gottfried Wilhelm Leibniz², realizou fascinantes registros sobre a catenária. Para Maor (2008), Leibniz fez questão que todos soubessem que por meio do seu cálculo diferencial foi solucionado o problema da catenária. Maor (2008), ainda registra que a equação da catenária era subtendida a partir do modo como ela é construída. A Figura 1.2 exibe o esboço da catenária segundo Leibniz.

Figura 1.2 – Anotações de Leibniz



Fonte: Maor (2008).

De acordo com Pereira e Melo (2016), houve um desafio para os matemáticos: resolver o problema da catenária. Surge então apenas três soluções geométricas corretas, as de Huygens, Jean e Leibniz, que apresentaram as propriedades, porém não demonstraram como chegar à solução.

Por volta do século XVII aconteceu o maior avanço no estudo das curvas, onde Jacques Bernoulli expôs oficialmente, em maio de 1690, no *Acta eruditorum*, o desafio: “[...] encontrar a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos”. (MAOR, 2008, pg. 183). Ver Figura 1.3.

Figura 1.3 – Desafio da catenária



Fonte: Maor (2008).

² ★ 1646 - † 1716

Jacques Bernoulli³ e seu irmão Jean Bernoulli⁴ fizeram grandes contribuições para a catenária. Segundo Mendes (2017), a catenária foi descoberta e apresentada por meio de cartas, e Jean conseguiu solucionar o problema antes que o irmão Jacques.

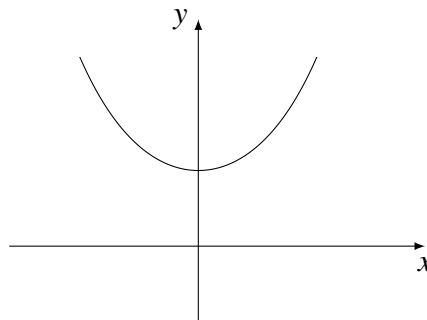
Os esforços de meu irmão foram inúteis. Quanto a mim, fui mais feliz, pois encontrara a habilidade (e digo isto sem me gabar, por que deveria esconder a verdade?) para resolvê-lo imediatamente [...]. Na manhã seguinte cheio de alegria, fui encontrar meu irmão, que ainda lutava miseravelmente com esse nó górdio, sem chegar à parte alguma, sempre achando, como Galileu, que a catenária era uma parábola. Pare! Pare! Eu disse a ele, não se torture mais tentando provar a identidade da catenária com a parábola, por que ela é inteiramente falsa. (MAOR, 2008)

Houve ainda as outras duas descobertas, de Leibniz, que usou das artimanhas do Cálculo Diferencial e, de Huygens, que utilizou de processos geométricos.

Partindo da forma como a curva é construída, levando em consideração a forma geométrica e analítica, e sabendo que as suas soluções são geradas a partir de equações, teve origem então a equação da catenária. Ainda segundo Mendes (2017), o nome catenária foi usado pela primeira vez pelo matemático Huygens, a uma carta destinada a Leibniz que a batizou com este nome.

A curva catenária é descrita por uma função hiperbólica e a parábola por uma função polinomial. Se forem observadas a olho nu, nota-se a grande semelhança e a única forma de diferenciá-las é por meio das equações. Isto se deve graças a geometria analítica. A forma da catenária é chamada de transcendente, pois é não algébrica. Esta equação hiperbólica, de acordo com Mendes (2017), foi criada em 1757 pelo matemático Vincenzo Riccati⁵, que anos mais tarde definiria a curva catenária. A curva catenária pode ser representada pela função $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + C$, ilustrada na Figura 1.4, considerando $a = 1$ e, a parábola pela função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Figura 1.4 – Gráfico da Curva Catenária



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

³ ★ 1654 - † 1705

⁴ ★ 1667 - † 1748

⁵ ★ 1707 - † 1775

Para Raposo (2013), percebe-se como a catenária se tornou conhecida, principalmente no meio da arquitetura e engenharia. A catenária invertida sustenta o próprio peso, e por sua beleza e propriedades despertou o interesse arquitetônico.

O exemplo clássico de aplicação da catenária, exibido em diversos artigos, *websites*, periódicos, entre outros, são as pontes pênséis. Na Figura 1.5, um tipo de ponte suspensa por cabos, que carrega a forma de catenária. Existem relatos de pontes orientais por volta da segunda metade do século XVII, porém da forma atual foram formadas desde o século XIX e estão presentes em várias partes do mundo, e por todo o Brasil. (TALAVERA, 2008)

Figura 1.5 – Ponte Golden Gate



Fonte: Ponte pênsil / E-CIVIL, 2020.

Ainda como exemplo da catenária, temos os túneis que carregam a forma de um cilindro catenário, tanto os metropolitanos quanto os ferroviários. A casa Milà, desenhada por Gaudi, foi construída sem linhas retas, entre os anos de 1905 e 1907, ficou conhecida por sua estrutura diferente. A Figura 1.6 mostra os arcos catenários no terraço da casa. (TALAVERA, 2008)

Figura 1.6 – Arcos catenários da Casa Milà



Fonte: <<https://pin.it/4E0et1w>>, 2016.

Se houver uma aplicação de força na catenária, está será distribuída igualmente por

toda a curva. Esta característica da catenária, de acordo com sciencesofworld (2012), justifica o fato da curva estar presente na barriga de uma grávida e nas extremidades de um ovo.

Vasconcelos (2013) mostra as aplicações que partem da equação catenária para solucionar problemas reais também relacionados com a transmissão de energia elétrica. Auxiliando com os custos de construção, manutenção das redes e ainda os impactos ambientais. A aplicação descrita pelo autor parte de uma carta topográfica, onde estão indicados os pontos que serão interligados. As preocupações, explanadas por Vasconcelos (2013), são reduzir os custos e observar a distância mínima dos cabos com o solo.

Devido às propriedades e suas aplicações, alguns autores realizaram estudos físicos utilizando as características da catenária. Como Sasaki e Jesus (2016) na propagação de um pulso na curva por meio de vídeo análise. No experimento utiliza-se, usando uma corrente com anéis de material plástico, por ser mais acessível e menos denso que o metal, pendurado nas extremidades por dois dinamômetros, ou seja, utilizando a curva catenária.

A catenária está presente ainda em cabos de transmissão elétrica suspensos por postes; no monumento Gateway Arch, que representa a forma de uma catenária invertida; nas construções de teia de aranha; no teto da estação Keleti, em Budapeste na Hungria; no Marquette Plaza, onde a catenária é um design no prédio; e localizado no Brasil, um dos pontos turísticos de Brasília, a ponte Juscelino Kubitschek, entre outros.

Depois de comprovado que a equação da catenária não poderia ser descrita por funções algébricas, segundo Maor (2008), a notação moderna da catenária foi dada da seguinte forma:

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}.$$

Em que a é uma constante que depende dos parâmetros físicos da corrente, a massa por unidade de comprimento, ou seja, sua densidade linear e da tensão que é segurada. Uma curiosidade é que a equação não foi apresentada dessa forma desde o começo porque o número e não tinha símbolo, além da função exponencial ser considerada inverso da função logarítmica.

Baseado em Stewart (2016), a catenária também pode ser escrita como função hiperbólica⁶:

$$y = \frac{\cosh(ax)}{a} + c.$$

Após observado um pouco da história da catenária, demonstra-se no próximo capítulo a equação da catenária no seu estágio atual.

⁶ "Certas combinações das funções exponenciais merecem nomes especiais [...] possuem relação com a hipérbole, por essa razão são chamadas coletivamente de funções hiperbólicas, e, individualmente, de seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e assim por diante". (STEWART, 2016, pg. 232).

2 A EQUAÇÃO DA CATENÁRIA

Como foi exposto no Capítulo 1, a catenária é uma curva formada por um cabo preso nas suas extremidades, que sustenta seu próprio peso e está sujeita apenas à força da gravidade (Figura 2.1). Neste capítulo será abordado a dedução do problema do cabo suspenso que é descrito por uma equação exponencial.

Figura 2.1 – Rede Elétrica no rio Corumbá IV



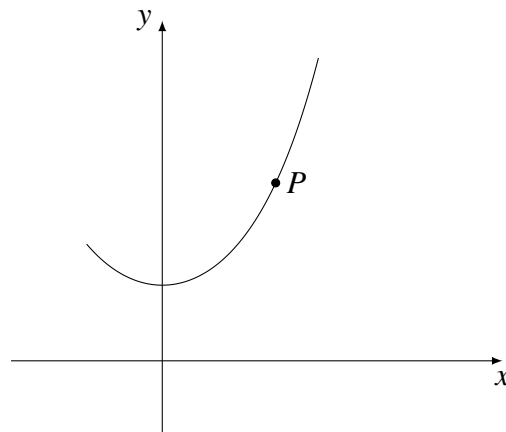
Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Para isso serão necessários alguns conceitos, como:

- Tensão: a força exercida pela corda.
- Densidade linear: a relação da massa por comprimento.
- A primeira lei de Newton: segundo Mckelvey e Grotch (1979) quando um objeto está em equilíbrio estático, a soma da força resultante é nula, não havendo nem aceleração, nem velocidade.

Como a catenária é uma curva plana, considerar-se-á que o eixo y intercepta a curva no ponto mínimo e que $P(x, y)$ seja um ponto qualquer da curva, veja na Figura 2.2. Esse sistema de coordenadas se encontra em equilíbrio, pois não há força externa, logo a força resultante de toda tensão exercida no cabo é nula. Como não ocorrem forças internas na curva, ou seja, é flexível, não encontra-se resistência para curvar-se na direção da tangente à curva.

Figura 2.2 – Curva Catenária



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

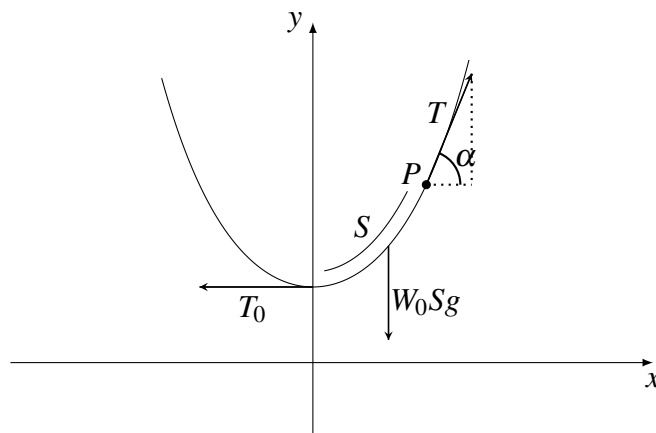
2.1 Equação (Diferencial) da Catenária

Nesta seção, tendo como referência principal Simmons (1987), modela-se a equação da catenária buscando a sua forma como equação diferencial.

Partindo do ponto mínimo da curva até o ponto, $P(x,y)$, existem três forças, que denotaremos da seguinte maneira:

- T_0 é a tensão do arco no ponto mínimo, que age horizontalmente, da direita para a esquerda;
- W_0Sg , é o peso do arco entre estes pontos, que atua paralelamente ao eixo y , mas no sentido contrário, sendo W_0 a densidade linear, S é o comprimento de tal arco e g a gravidade;
- T é a tensão que age na direção da tangente em P e forma um ângulo α com o eixo x .

Figura 2.3 – Curva Catenária



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Pelo fato do sistema estar em equilíbrio estático tem-se que:

$$\vec{T} + \overrightarrow{W_0 S g} + \vec{T}_0 = 0 \quad (2.1)$$

Ao decompor a equação de equilíbrio 2.1 obtém-se:

$$\begin{aligned} T \operatorname{sen} \alpha &= W_0 S g \\ T \cos \alpha &= T_0 \end{aligned}$$

Dividindo membro a membro:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W_0 S g}{T_0}. \quad (2.2)$$

Como T age na direção da tangente, tem-se que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ (coeficiente angular da reta tangente a curva no ponto P).

Além disto, considerando que $\frac{W_0 g}{T_0}$ é uma constante (constante de especificidade do cabo), a equação 2.2 pode ser reescrita como:

$$\frac{dy}{dx} = aS, \text{ onde } a = \frac{W_0 g}{T_0}. \quad (2.3)$$

Sabe-se que o comprimento de uma curva ¹, gráfico da função real $y = f(t)$, é dado por:

$$S = \int_b^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (2.4)$$

Assim, substituindo 2.4, em 2.3:

$$\frac{dy}{dx} = aS$$

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot \left(\int_b^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \right). \quad (2.5)$$

Derivando ambos os lados em relação a x :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right). \quad (2.6)$$

A equação 2.6 é a equação diferencial não linear de 2º ordem da catenária.

¹ A demonstração da fórmula pode ser encontra em Faria (2001).

Considerando o modelo do problema tem-se duas condições iniciais associadas a equação 2.6:

1. $y(0) = \frac{1}{a}$. Coloca-se a origem do sistema de coordenadas, de modo que quando $x = 0$, então $y = \frac{1}{a}$.
2. $y'(0) = 0$. Em $x = 0$ tem-se ponto de mínimo, logo a derivada neste ponto é nula.

Assim, tem-se o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = a \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right) \\ y(0) = \frac{1}{a} \\ y'(0) = 0 \end{cases} . \quad (2.7)$$

2.2 Equação da Catenária

Nesta seção determina-se a função cujo gráfico é a catenária. Tal função é chamada "equação da catenária". Para determiná-la calcula-se a solução do PVI 2.7 dado na seção 2.1.

Para determinar a solução a equação diferencial, dada no PVI 2.7, faz-se uma mudança de variável, utilizando o seguinte artifício:

$$p = \frac{dy}{dx}. \quad (2.8)$$

Portanto:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Substituindo na equação diferencial dada no PVI 2.7:

$$\frac{dp}{dx} = a \cdot \left(\sqrt{1 + p^2} \right).$$

Dessa forma obtém-se uma equação diferencial de 1º ordem de variáveis separáveis, que pode ser resolvida integrando ambos os lados:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int a dx. \quad (2.9)$$

Resolvendo a integral do primeiro membro da equação 2.9, utilizando substituição trigonométrica:

$$p = \operatorname{tg} \alpha, \text{ com } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$dp = \sec^2 \alpha d\alpha.$$

$$\sqrt{1+p^2} = \sec \alpha.$$

Substituindo:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{\sec^2 \alpha}{\sec \alpha} d\alpha$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \sec \alpha d\alpha$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \ln(\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha) + k_1$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \ln(\sqrt{1+p^2} + p) + k_1 \quad (2.10)$$

Para a integral do segundo membro da equação 2.9, tem-se:

$$\int adx = ax + k_2 \quad (2.11)$$

Substituindo as equações 2.10 e 2.11 na equação 2.9, e definindo $k_2 - k_1 = c_1$:

$$\ln(\sqrt{1+p^2} + p) = ax + c_1. \quad (2.12)$$

Para determinar o valor de c_1 note que, considerando a condição inicial $y'(0) = 0$, dada no PVI 2.7, e o artifício 2.8:

$$p(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$$

$$p(0) = 0.$$

Assim, considerando $x = 0$ na equação 2.12 tem-se:

$$\ln 1 = c_1$$

$$c_1 = 0.$$

Portanto,

$$\ln(\sqrt{1+p^2} + p) = ax.$$

Isolando p :

$$(\sqrt{1+p^2} + p) = e^{ax}$$

$$(\sqrt{1+p^2})^2 = (e^{ax} - p)^2$$

$$1 + p^2 = e^{2ax} - 2pe^{ax} + p^2$$

$$1 = e^{2ax} - 2pe^{ax}$$

$$1 - e^{2ax} = -2pe^{ax}$$

$$p = \frac{1 - e^{2ax}}{-2e^{ax}}$$

$$p = \frac{-e^{2ax}}{-2e^{ax}} - \frac{1}{2e^{ax}}$$

$$p = \frac{e^{ax}}{2} - \frac{1}{2e^{ax}}$$

$$p = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}. \quad (2.13)$$

Substituindo 2.13 em 2.8 e, em seguida integrando em relação a x , ambos os lados:

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} dx$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\int e^{ax} dx - \int e^{-ax} dx \right)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ax}}{a} + \frac{e^{-ax}}{a} \right) + c_2$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{a} \right) + c_2$$

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} + c_2.$$

Considerando a condição inicial $y(0) = \frac{1}{a}$, dada no PVI 2.7, tem-se:

$$c_2 = 0.$$

Portanto, a solução do PVI 2.7, é:

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}. \quad (2.14)$$

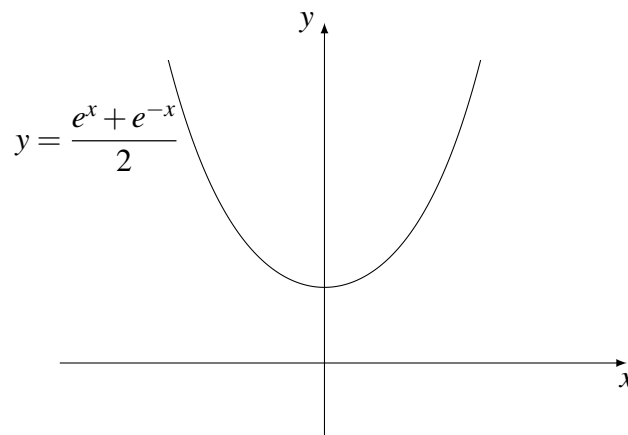
A equação 2.14 é a equação da catenária.

Observa-se que a equação da catenária também pode ser escrita como:

$$y = \frac{\cosh(ax)}{a}.$$

A Figura 2.4 exibe a curva da catenária cuja especificidade do cabo é $a = 1$.

Figura 2.4 – Gráfico da Curva Catenária



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Apropriados da equação da catenária, no próximo capítulo realiza-se o estudo, de conceitos de geometria diferencial aplicados a catenária.

3 ESTUDO DA CATENÁRIA

Neste capítulo aborda-se as características da geometria da curva catenária utilizando conceitos de cálculo diferencial e integral. Realiza-se, seguindo Thomas (2009) e Stewart (2013): o cálculo da equação paramétrica, como forma de definir valores independentes e em função de um único parâmetro; o comprimento de arco, que é mensurável, permitindo assim localizar pontos ao longo da curva, fornecendo sua distância orientada a partir de algum ponto base, para isso utiliza-se da equação parametrizada; a curvatura da catenária, que mede a velocidade com que as curvas deixam de ser retas no plano; e o raio de curvatura, que é o raio do círculo de curvatura, este círculo é o que melhor descreve como a catenária se comporta em um determinado ponto. Considera-se que o leitor tenha familiaridade ou já teve, ao menos, um primeiro contato com tais conceitos.

Por definição, a catenária pode ser escrita como:

$$y = \frac{\cosh(ax)}{a}.$$

Considerando x como o próprio parâmetro t , segue que uma equação paramétrica da catenária é:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{\cosh(at)}{a} \end{cases} \quad (3.1)$$

Existem outras formas de se parametrizar a catenária. Um segundo modo é descrito no Apêndice A.

Neste capítulo utiliza-se o *software* GeoGebra, disponível para uso online no endereço: <<https://www.geogebra.org/>>. O GeoGebra une diversas ferramentas para trabalhar conteúdos matemáticos, em uma única aplicação, entre eles: álgebra, geometria, gráficos, entre outros.

3.1 Comprimento de arco da Catenária

Nesta seção calcula-se o comprimento de arco, S , da catenária. Em outras palavras, calcula-se a distância entre dois pontos ao longo da curva. Tal comprimento independe da parametrização.

Dada uma curva com equações paramétricas $x(t), y(t), u \leq t \leq v$. O comprimento de arco é dado pela fórmula¹:

¹ A demonstração da fórmula pode ser encontrada em Simmons (1987).

$$S = \int_u^v \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Considere a parametrização:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{\cosh(at)}{a} \end{cases} .$$

O comprimento de arco, S , da catenária, é dado por:

$$S = \int_u^v \sqrt{1 + \sinh^2(at)} dt, \text{ com } u \leq t \leq v.$$

Utilizando a identidade hiperbólica: $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

$$S = \int_u^v \cosh(at) dt$$

$$S = \frac{1}{a} \sinh(at) \Big|_u^v$$

$$S = \frac{1}{a} \sinh(av) - \frac{1}{a} \sinh(au).$$

Como exemplo, considerando $a = 1$, tem-se que o comprimento de arco do ponto $A(1; 1, 6)$ ao ponto $B(2; 3, 8)$, com $1 \leq t \leq 2$, ambos pertencentes à catenária, é dado por:

$$S = \sinh(2) - \sinh(1)$$

$$S = \frac{-e^{-2} + e^2}{2} - \frac{-e^{-1} + e^1}{2}$$

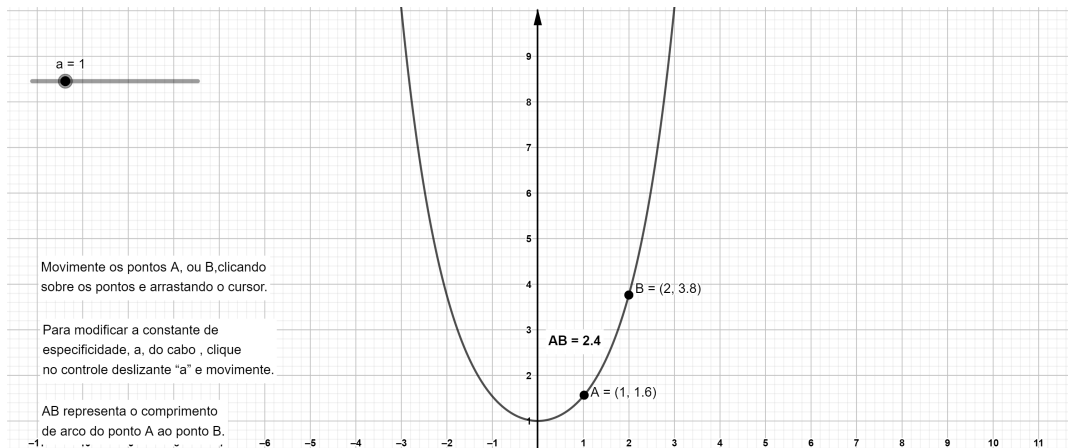
$$S = \frac{-1 + e^4 + e - e^3}{2e^2}$$

$$S = 2,4.$$

Utilizou-se ainda o *software* GeoGebra para calcular o comprimento de arco dado dois pontos. Na Figura 3.1 destaca-se o fragmento da curva do ponto $A(1; 1, 6)$ ao ponto $B(2; 3, 8)$. O valor $AB = 2,4$ é o valor do comprimento de arco calculado diretamente no geogebra.

Para calcular o comprimento de arco utilizando outras coordenadas para o ponto A e B , acesse o link: <<https://www.geogebra.org/m/mwp5wj9>>. Ainda, no link, pode-se analisar que conforme a especificidade, a , do cabo, aumenta, mantendo-se a abscissa dos pontos fixa, varia-se apenas as ordenadas, maior será o comprimento de arco entre os pontos A e B .

Figura 3.1 – Gráfico do Comprimento de Arco na Catenária



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Apenas como observação, a fórmula do comprimento de arco também pode ser desenvolvida utilizando a equação da catenária 2.14, dada a função 2.4.²

3.2 Curvatura da Catenária

Para Stewart (2013): "A curvatura de uma curva em um dado ponto é a medida do quão rapidamente a curva muda de direção no ponto". É o módulo da taxa de variação do vetor tangente unitário a curva, em relação ao comprimento de arco. Definido por Thomas (2009) da seguinte maneira:

Definição 1. Se T é o vetor tangente unitário de uma curva lisa, a função curvatura é

$$k = \left| \frac{dT}{ds} \right|.$$

Partindo de uma das equações paramétricas desenvolvidas, é possível obter uma medida numérica de quanto a catenária encurva-se em um determinado ponto. Para maiores detalhes, consultar: Stewart (2013) e Anton, Bivens e Davis (2007).

O seguinte teorema fornece a fórmula mais conveniente para a curvatura em termos do parâmetro t .

Teorema 1. A curvatura, k , de uma curva dada por uma função vetorial, r , é expressa por:

$$k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

$$^2 \quad S = \int_b^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$S = \int_b^x \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-at}(e^{2at} - 1)}{2}\right)^2} dt.$$

Este Teorema é uma consequência da Definição 1. O procedimento de demonstração encontra-se em Stewart (2013).

Para determinar a curvatura, $k(t)$, da catenária em um ponto qualquer, parte-se do vetor posição $r(t)$. Considerando a equação paramétrica 3.1, tem-se:

$$\text{i. } r(t) = \left\langle t, \frac{\cosh(at)}{a} \right\rangle.$$

$$\text{ii. } r'(t) = \langle 1, \sinh(at) \rangle;$$

$$\text{iii. } r''(t) = \langle 0, a \cosh(at) \rangle.$$

Logo,

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \sinh(at) & 0 \\ 0 & a \cosh(at) & 0 \end{vmatrix}$$

$$r'(t) \times r''(t) = a \cosh(at) \mathbf{k}$$

e

$$\|r'(t)\| = \sqrt{1^2 + (\sinh(at))^2} = \cosh(at),$$

$$\|r'(t) \times r''(t)\| = a \cosh(at).$$

Utilizando o Teorema 1

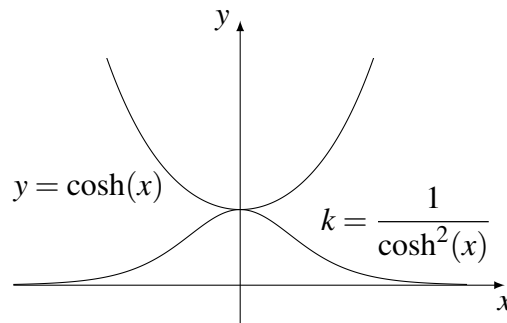
$$k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{a \cosh(at)}{(\cosh(at))^3}.$$

Chega-se então à curvatura da catenária, dada pela fórmula:

$$k(t) = \frac{a}{\cosh^2(at)}. \quad (3.2)$$

No Apêndice B determina-se a curvatura utilizando a parametrização dada A.1. A Figura 3.2 exibe o gráfico da catenária $y = \frac{\cosh(ax)}{a}$ e da função curvatura considerando $a = 1$.

Figura 3.2 – Gráfico da Curvatura da Catenária



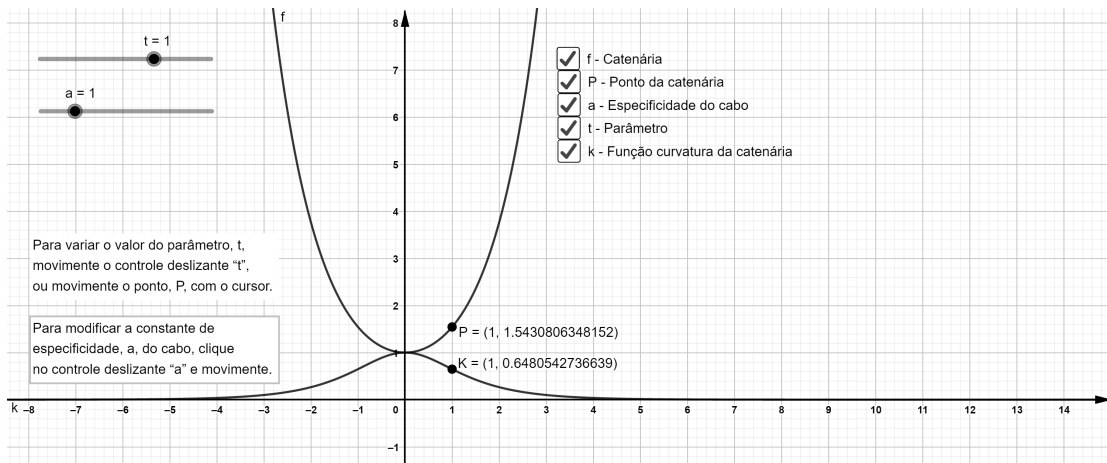
Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Com o objetivo de facilitar a visualização do valor da curvatura em cada ponto, plotou-se no *software* GeoGebra a equação da catenária, f , e a função curvatura, k . O arquivo (online) pode ser acessado no link: <<https://www.geogebra.org/m/n2naetky>>.

Ainda utilizando o arquivo é possível visualizar que apenas para pontos próximos de $t = 0$, conforme a especificidade, a , do cabo, aumenta, a curvatura também aumenta, ou seja, conforme o parâmetro, t , se aproxima de zero, maior será a curvatura. Na medida em que o parâmetro t se afasta de zero a curvatura no ponto diminui.

Observou-se que para $t = 1$ a curvatura no ponto tem valor igual a 0,6480542736639 unidades, como pode ser visualizado na Figura 3.3:

Figura 3.3 – Gráfico da Função Curvatura



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

3.3 Raio de Curvatura e Círculo Osculador

Seja uma curva com curvatura k em um ponto P , então o **círculo osculador** é o círculo que tem: a mesma reta tangente que a curva neste ponto P , o centro do lado côncavo da curva, compartilha da mesma curvatura k e tem raio $\beta = \frac{1}{k}$. Tal raio é denominado **raio de curvatura**.

Utilizando a curvatura dada em 3.2, o raio de curvatura, β , da catenária é:

$$\beta = \frac{\cosh^2(at)}{a}. \quad (3.3)$$

Considerando $a = 1$, o ponto mínimo é $(0, 1)$, a catenária tem curvatura neste ponto $k = 1$, e o raio de curvatura $\beta = 1$, portanto o centro do círculo osculador é $(0, 2)$.

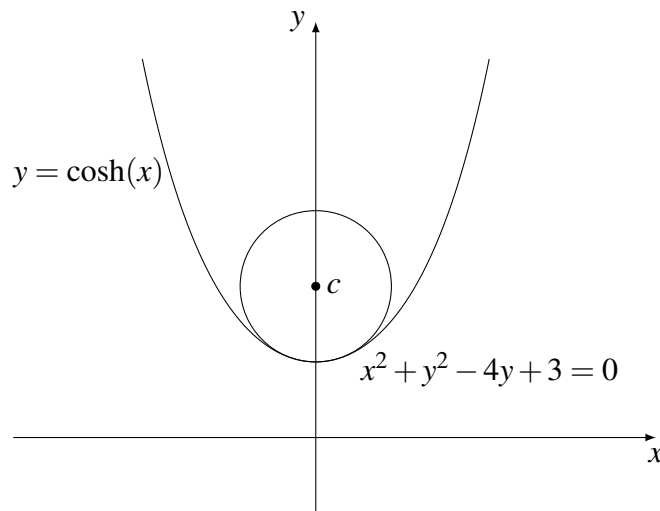
Assim, o círculo osculador no ponto mínimo é:

$$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 1^2$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0. \quad (3.4)$$

A Figura 3.4 exibe a catenária e o círculo osculador no ponto mínimo (considerou-se $a = 1$ para o esboço).

Figura 3.4 – Gráfico do Círculo Osculador da Catenária no Ponto Mínimo



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

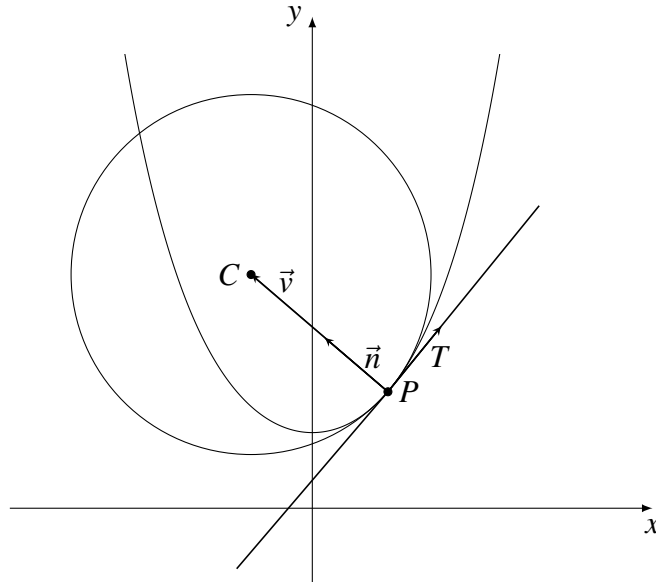
3.3.1 Círculos Osculador da Catenária

Nesta seção será deduzida a equação do círculo osculador em qualquer ponto da catenária. Necessita-se conhecer o centro do círculo, $C(x_c, y_c)$, pois o raio, β , foi determinado. Utiliza-se a definição, dada na seção 3.3, que o círculo tem em comum a reta tangente com curva no ponto $P = \left(t, \frac{\cosh(at)}{a}\right)$.

Considere o vetor, \vec{v} , definido pelo centro C menos o ponto P , tal vetor é normal ao vetor tangente. Assim, encontra-se o vetor tangente unitário, T , em seguida define-se o vetor normal unitário \vec{n} . Como \vec{n} tem a mesma direção e sentido do vetor \vec{v} , e o módulo de \vec{v} é o raio

do círculo osculador, ou seja, a distância entre o ponto P e o ponto C , basta multiplicar o raio do círculo β pelo vetor normal unitário \vec{n} . Com isso, conhecendo o ponto P e o vetor normal \vec{v} , obtém-se o centro do círculo osculador $C(x_c, y_c)$. Veja a Figura 3.5.

Figura 3.5 – Gráfico dos Vetores na Curva Catenária



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Logo, considere a equação paramétrica 3.1:

$$r(t) = \left\langle t, \frac{\cosh(at)}{a} \right\rangle.$$

Tem-se o seguinte vetor tangente à curva:

$$r'(t) = \langle 1, \sinh(at) \rangle.$$

Para encontrar o vetor normal unitário a reta tangente, primeiramente calcula-se o vetor tangente unitário:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

$$T(t) = \frac{\langle 1, \sinh(at) \rangle}{\sqrt{1^2 + \sinh^2(at)}}.$$

Por meio da identidade hiperbólica, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, tem-se:

$$T(t) = \frac{\langle 1, \sinh(at) \rangle}{\cosh(at)}$$

$$T(t) = \left\langle \frac{1}{\cosh(at)}, \frac{\sinh(at)}{\cosh(at)} \right\rangle$$

$$T(t) = \langle \operatorname{sech}(at), \operatorname{tgh}(at) \rangle.$$

Após derivar $T(t)$, calcula-se o vetor normal unitário.

$$\vec{n}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

$$\vec{n}(t) = \frac{\langle -\operatorname{sech}(at)\operatorname{tgh}(at)a, \operatorname{sech}^2(at)a \rangle}{\sqrt{(-\operatorname{sech}(at)\operatorname{tgh}(at)a)^2 + (\operatorname{sech}^2(at)a)^2}}$$

$$\vec{n}(t) = \frac{\langle -\operatorname{sech}(at)\operatorname{tgh}(at)a, \operatorname{sech}^2(at)a \rangle}{\sqrt{a^2\operatorname{sech}^2(at)\operatorname{tgh}^2(at) + \operatorname{sech}^4(at)a^2}}$$

$$\vec{n}(t) = \frac{\langle -\operatorname{sech}(at)\operatorname{tgh}(at)a, \operatorname{sech}^2(at)a \rangle}{\sqrt{a^2\operatorname{sech}^2(at)(\operatorname{tgh}^2(at) + \operatorname{sech}^2(at))}}$$

$$\vec{n}(t) = \frac{\langle -\operatorname{sech}(at)\operatorname{tgh}(at)a, \operatorname{sech}^2(at)a \rangle}{\sqrt{a^2}\sqrt{\operatorname{sech}^2(at)}\sqrt{\operatorname{tgh}^2(at) + \operatorname{sech}^2(at)}}$$

$$\vec{n}(t) = \frac{\langle -\operatorname{sech}(at)\operatorname{tgh}(at)a, \operatorname{sech}^2(at)a \rangle}{a\operatorname{sech}(at) \cdot \sqrt{\operatorname{tgh}^2(at) + \operatorname{sech}^2(at)}}.$$

Por meio da identidade hiperbólica, $\operatorname{sech}^2(x) + \operatorname{tgh}^2(x) = 1$, tem-se:

$$\vec{n}(t) = \frac{\langle -\operatorname{sech}(at)\operatorname{tgh}(at)a, \operatorname{sech}^2(at)a \rangle}{a\operatorname{sech}(at)}$$

$$\vec{n}(t) = \langle -\operatorname{tgh}(at), \operatorname{sech}(at) \rangle. \quad (3.5)$$

A partir da equação 3.5 e conhecendo o raio, pode-se encontrar o vetor \vec{v} .

$$\vec{v}(t) = \frac{\cosh^2(at)}{a} \cdot \langle -\operatorname{tgh}(at), \operatorname{sech}(at) \rangle$$

$$\vec{v}(t) = \left\langle -\frac{\cosh^2(at) \cdot \operatorname{tgh}(at)}{a}, \frac{\cosh^2(at) \cdot \operatorname{sech}(at)}{a} \right\rangle$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Devido à aplicabilidade da curva catenária, sua equação recebeu grande importância. Neste trabalho deduziu-se a equação da catenária por meio de uma equação diferencial. Deduziu-se também, o comprimento de arco a partir de uma das equações paramétricas, a função curvatura, utilizando o vetor tangente unitário a curva, e o raio de curvatura.

A construção da equação do círculo osculador, em qualquer ponto, foi possível por meio do vetor normal à catenária. Além de mostrar onde a catenária aparece, desde as obras arquitetônicas até na natureza.

Concluiu-se que a medida com que o parâmetro, t , na equação paramétrica da catenária, aumenta, a curvatura no ponto diminui e o raio do círculo osculador aumenta. Apenas para pontos próximos de $t = 0$ que a curvatura aumenta e, o raio do círculo osculador diminui.

Analisando-se para a variação da constante de especificidade, a , do cabo, os valores do comprimento de arco e da curvatura aumentam, conforme a constante, a , aumenta, e o raio do círculo osculador diminui, isso para pontos próximos de $t = 0$.

Para facilitar a visualização de algumas propriedades, utilizou-se o *software* Geogebra, e pôde-se notar como a visualização gráfica de um problema torna-o mais claro e compreensível. Espera-se que os arquivos online e manipuláveis sejam utilizados para facilitar a compreensão dos conceitos de comprimento de arco, curvatura, raio de curvatura e círculo osculador da catenária. Para estudos posteriores pode-se utilizar nas aulas de cálculo a análise desenvolvida neste trabalho em outras curvas.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo. Vol. 2*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.
- FARIA, S. R. d. A catenária. *Universidade Federal de Minas Gerais*, Belo Horizonte, 2001.
- MAOR, E. *A história de um número*. Rio de Janeiro: ed. Calife. - 5º, 2008.
- MCKELVEY, J. P.; GROTCHE, H. *Física*. São Paulo: Harbal, 1979.
- MENDES, M. F. A curva catenária como aplicação da função exponencial. *Universidade Federal de São Carlos. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE*, Sorocaba, 2017.
- PEREIRA, C. C.; MELO, C. B. d. S. Explorando curvas planas por meio da modelagem matemática e da geometria dinâmica: Uma experiência com um grupo de alunos. *ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades*, São Paulo, 2016.
- RAPOSO, C. S. C. M. Curvas famosas e não só: teoria, histórias e atividades. *Universidade de Lisboa*, Lisboa, 2013.
- SASAKI, D. G. G.; JESUS, V. L. B. Uma abordagem por videoanálise da propagação de um pulso em uma catenária. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, 2016.
- SCIENCESOFWORLD. *Túnel, ovo, grávida: Catenária*. 2012. Disponível em: <<https://sciencesofworld.wordpress.com/2012/03/04/tunel-ovo-gravida/>>. Acesso em: 24 fev. 2022.
- SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica: Volume I*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- STEWART, J. *Cálculo: volume II*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- STEWART, J. *Cálculo: volume I*. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- TALAVERA, L. M. B. Parábola e catenária: história e aplicações. *s.n.*, São Paulo, 2008.
- THOMAS, G. B. *Cálculo: volume II*. 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.
- VASCONCELOS, J. G. S. F. Funções hiperbólicas: História, conceito e aplicação. *Universidade Federal do Amazonas*, Manaus, 2013.

Apêndices

APÊNDICE A – EQUAÇÃO PARAMÉTRICA DA CATENÁRIA

As equações paramétricas podem ser determinadas de diversas maneiras. Outra forma de descrever a equação paramétrica da catenária é eliminando as exponenciais por meio de logaritmos:

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$$

Considerando $t = e^{ax}$, tem-se:

$$(1) \ln t = ax \Rightarrow x = \frac{\ln t}{a};$$

$$(2) t^{-1} = e^{-ax} \Rightarrow y = \frac{t + t^{-1}}{2a}.$$

Portanto, a equação paramétrica da catenária é:

$$\begin{cases} x = \frac{\ln t}{a}, t > 0 \\ y = \frac{t + \frac{1}{t}}{2a} \end{cases} . \quad (\text{A.1})$$

APÊNDICE B – CURVATURA DA CATENÁRIA

Como foi determinado no Apêndice A outra equação paramétrica, pode-se encontrar outra função curvatura da catenária utilizando a equação A.1:

$$r(t) = \frac{\ln t}{a} \mathbf{i} + \frac{t + \frac{1}{t}}{2a} \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

Assim,

$$r'(t) = \frac{1}{at} \mathbf{i} + \frac{t^2 - 1}{2at^2} \mathbf{j}$$

$$r''(t) = \left(-\frac{1}{at^2} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{at^3} \mathbf{j}$$

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{at} & \frac{t^2 - 1}{2at^2} & 0 \\ -\frac{1}{at^2} & \frac{1}{at^3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$r'(t) \times r''(t) = \frac{1}{a^2 t^4} \mathbf{k} + \frac{t^2 - 1}{2a^2 t^4} \mathbf{k} = \frac{t^2 + 1}{2a^2 t^4} \mathbf{k}$$

Portanto,

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{at}\right)^2 + \left(\frac{t^2 - 1}{2at^2}\right)^2} = \frac{t^2 + 1}{2at^2}$$

$$\|r'(t) \times r''(t)\| = \frac{t^2 + 1}{2a^2 t^4}$$

Aplicando o Teorema 1, tem-se:

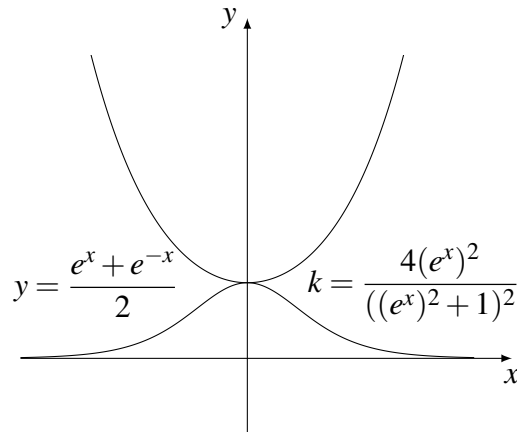
$$k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\frac{t^2 + 1}{2a^2 t^4}}{\left(\frac{t^2 + 1}{2at^2}\right)^3}$$

Logo, a curvatura da catenária é dada pela fórmula:

$$k(t) = \frac{4at^2}{(t^2 + 1)^2}, \quad (\text{B.1})$$

onde considera-se $t = e^{ax}$ para parametrização da catenária $y = \frac{\cosh(ax)}{a}$.

Figura B.1 – Gráfico da Curvatura da Catenária



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.