

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
Câmpus Central - Sede: Anápolis - CET
Curso de Matemática

**Introdução à Geometria Fractal:
Aplicações da Dimensão de *Box-Counting***

DANIEL ISRAEL MOREIRA

Anápolis

2021

DANIEL ISRAEL MOREIRA

**Introdução à Geometria Fractal:
Aplicações da Dimensão de *Box-Counting***

Trabalho de Curso (TC) apresentado, à Coordenação Setorial do Curso de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Graduado no Curso de Matemática da Universidade Estadual de Goiás.

Orientador: Prof. Me. Tiago de Lima Bento Pereira

Anápolis

2021

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UEG
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M838i Moreira, Daniel Israel
 Introdução à geometria fractal: Aplicações da
 dimensão de Box-Counting / Daniel Israel Moreira;
 orientador Tiago de Lima Bento Pereira. -- Anápolis,
 2022.
 65 p.

 Graduação - Matemática -- Câmpus Central - Sede:
 Anápolis - CET, Universidade Estadual de Goiás, 2022.

 1. Geometria fractal. 2. Dimensão fractal. 3.
 Topologia. 4. Espaços Métricos. 5. Irregularidade. I.
 Pereira, Tiago de Lima Bento , orient. II. Título.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS CENTRAL – SEDE: ANÁPOLIS - CET

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO DE MONOGRAFIAS
DIGITAIS NO BANCO DE DADOS DO CÂMPUS CENTRAL – SEDE: ANÁPOLIS - CET

Eu Daniel Israel Moreira

Curso Matemática - Licenciatura

Na qualidade de titular dos direitos de autor que recaem sobre a minha monografia de
Conclusão de Curso, intitulada Introdução à Geometria Fractal: Aplicações da Dimensão de
Box-Counting

Defendida em 18 / 03 / 2022, junto à banca examinadora do curso com
fundamento nas disposições da lei nº 9.610 de 19 de fevereiro de 1998, autorizo a
disponibilizar gratuitamente a obra citada, sem ressarcimento de direitos autorais, para fins de
impressão e/ou *downloading* pela *internet*, a título de divulgação da produção científica
gerada pela Universidade Estadual de Goiás / Câmpus Central – SEDE: Anápolis - CET, a
partir desta data.

autorizo texto (completo)

autorizo parcial (resumo)

Assim, autorizo a liberação total ou resumo de meu trabalho, estando ciente que o conteúdo
disponibilizado é de minha inteira responsabilidade.

Anápolis, 28 de março de 2022

Assinatura do autor

Daniel Israel Moreira

Assinatura do orientador

Biago de Lima Bento Pereira

Universidade
Estadual de
Goiás



ESTADO DE GOIÁS
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - UEG
COORDENAÇÃO SETORIAL MATEMÁTICA ANÁPOLIS

DANIEL ISRAEL MOREIRA

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL: APLICAÇÕES DA DIMENSÃO DE *BOX-COUNTING*

Trabalho de Curso II de Matemática apresentado à Banca Examinadora como parte dos requisitos para a obtenção do grau de graduado em Licenciatura em Matemática.

Aprovado. Banca Examinadora do Trabalho de Curso II do curso de Matemática do Campus Central: Sede - Anápolis - CET da Universidade Estadual de Goiás.

Anápolis - Goiás, 18 de março de 2022.

Me. Tiago de Lima Bento Pereira
Orientador(a)/Presidente da banca examinadora

Dr. Fabiano Boaventura de Miranda
1º Membro da Banca Examinadora

M.e Cleber Giuglioli Carrasco
2º Membro da Banca Examinadora



Documento assinado eletronicamente por **TIAGO DE LIMA BENTO PEREIRA, Coordenador (a)**, em 23/03/2022, às 00:10, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



Documento assinado eletronicamente por **CLEBER GIUGLIOLI CARRASCO, Docente de Ensino Superior**, em 23/03/2022, às 08:45, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



Documento assinado eletronicamente por **FABIANO BOAVENTURA DE MIRANDA, Docente de Ensino Superior**, em 23/03/2022, às 09:44, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site
http://sei.gov.br/sei/controlador_externo.php?



acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=1 informando o código verificador 000028575358 e o código CRC 228CB08E.

COORDENAÇÃO SETORIAL MATEMÁTICA ANÁPOLIS
RODOVIA BR 153 S/Nº - Bairro ZONA RURAL - CEP 75132-903 - ANAPOLIS - GO
0- QUADRA ÁREA KM 99 (62)3328-1139



Referência: Processo nº 202200020004306



SEI 000028575358

*Este trabalho é dedicado à todos aqueles que,
de alguma forma, mesmo sem consciência de tal feito,
possibilitaram a minha caminhada até aqui.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me guiado em cada passo e ter me dado forças para seguir superando todas as dificuldades.

Aos meus pais, Levi José Moreira e Ana de Moura Tavares Moreira, que sempre me apoiaram em cada etapa da vida, apontando desde a minha tenra idade as diretrizes do conhecimento, estimulando a busca pela sabedoria.

A toda a minha família, incluindo minhas irmãs Noemy Israel Moreira e Nicolly Israel Moreira, as quais sempre me apoiaram desde a infância.

À Anna Karollyne Citra Bueno, minha namorada, que, de maneira esplêndida me trouxe grande motivação para a conclusão dos trabalhos acadêmicos.

Ao professor Me. Tiago de Lima Bento Pereira, que indubitavelmente mediou de forma ímpar os conhecimentos alcançados durante o trabalho de conclusão do curso.

A todos os professores que fizeram parte de minha trajetória acadêmica, por terem contribuído para o meu crescimento intelectual.

Aos meus amigos, Nicolas Douglas Lima Costa, José Eduardo Gomes Batista, Lucas Piedade Nunes, Welder de Jesus, Gustavo Henrique Gomes Muniz, Sara Magalhães Corte Miranda, Vanessa Cardoso Oliveira, Lillian Moreira Pires, Aline Lisboa Mendes, Isabella Cristina Santos Neres, que me apoiaram e, juntamente comigo, trabalharam para a construção de novos saberes e para tornar mais agradável esse período.

Aos colegas que, apesar de não muito próximos, também contribuíram para meu elevamento acadêmico.

Por fim, agradeço à UEG, incluindo servidores e funcionários, que envidaram esforços contribuindo para a formação de profissionais de excelência.

"O que motiva a existência de um matemático é a descoberta de padrões, para encontrar e explicar as regras subjacentes à natureza e prever o que acontecerá a seguir".

(Marcus Du Sautoy)

RESUMO

Os fractais, objetos matemáticos que apresentam em si mesmos a propriedade de autossimilaridade, são capazes de despertar o interesse de matemáticos e não matemáticos, algumas razões para isso são sua aparente irregularidade, sua complexidade e sua beleza. A dimensão fractal, ferramenta utilizada pela Geometria Fractal para o estudo desses objetos, pode ser empregada, também, a objetos que não são considerados fractais. Esse trabalho tem como objetivo o estudo da Geometria Fractal, com ênfase, na dimensão de *Box-Counting*, exibindo, a partir da pesquisa bibliográfica, o que é essa área da matemática, sua importância e sua história. Mostra-se, também, aplicações nos campos da geografia, medicina, economia e arquitetura. Realiza-se uma revisão acerca de noções de topologia com conceitos de métrica, espaço métrico, bolas, esferas e coberturas. Por fim apresenta-se como é feito o cálculo da dimensão fractal de *Box-Counting*, além de uma maneira de aproximá-la utilizando o método dos mínimos quadrados, de forma manual e também através do uso do *software Matlab*. Como aplicação calcula-se a dimensão fractal de *box-counting* das fronteiras do Brasil e do município de Anápolis, localizado no estado de Goiás - Brasil.

Palavras-chave: Geometria Fractal. Dimensão Fractal. Topologia. Espaços Métricos. Irregularidade.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Comparação entre Dimensão Euclidiana e Dimensão Fractal.	24
Figura 1.2 – Exemplos de fractais.	24
Figura 1.3 – Fractais construídos matematicamente.	25
Figura 2.1 – Bola aberta de centro a e raio r	31
Figura 2.2 – Esfera de centro a e raio r	31
Figura 2.3 – Bola fechada de centro a e raio r	31
Figura 2.4 – Conjunto X e um exemplo de cobertura.	32
Figura 3.1 – Diferentes coberturas sobre objeto.	35
Figura 3.2 – Tapete de Sierpinski.	35
Figura 3.3 – Coberturas sobre Tapete de Sierpinski.	36
Figura 3.4 – Traço aleatório.	38
Figura 3.5 – Figura sobre malha quadriculada.	38
Figura 3.6 – Gráfico: Aproximação da dimensão fractal de <i>Box-Counting</i> para o Exemplo 3.2.	40
Figura 3.7 – Gráfico: Aproximação da dimensão fractal de <i>Box-Counting</i> da Figura 3.4.	42
Figura 3.8 – Território brasileiro.	43
Figura 3.9 – Gráfico: Aproximação da dimensão fractal de <i>Box-Counting</i> para o Exemplo 3.4.	44
Figura 3.10–Fronteira territorial do município de Anápolis, Goiás.	45
Figura 3.11–Contorno do território município de Anápolis, Goiás.	45
Figura 3.12–Gráfico: Aproximação da dimensão fractal de <i>Box-Counting</i> do Exemplo 3.5.	46
Figura A.1–Gráfico: Aproximação da dimensão fractal de <i>Box-Counting</i>	53
Figura B.1 – Código para leitura de figura.	55
Figura B.2 – Figuras após leitura pelo <i>MATLAB</i>	55
Figura B.3 – Código para a contagem do número de bolas em relação aos raios.	56
Figura B.4 – Número de bolas (n) em função do raio (r) de uma Imagem.	56
Figura B.5 – Códigos para definição de valores para construção de tabelas, fórmulas e gráficos.	56
Figura B.6 – Código para construção de tabela com as variáveis dadas.	57
Figura B.7 – Código para cálculo da dimensão fractal pelo método dos mínimos quadrados.	57
Figura B.8 – Código para o cálculo do coeficiente de determinação.	58
Figura B.9 – Código para plotagem de gráfico.	58
Figura B.10–Gráfico de exemplificação.	58
Figura C.1 – Códigos para o Exemplo 3.3.	59
Figura D.1 – Códigos para o Exemplo 3.4.	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Número de bolas necessárias para se ter uma cobertura da Figura 3.2 de acordo com o raio.	36
Tabela 2 – Número de bolas necessárias para se ter uma cobertura da Figura 3.4 de acordo com o raio (Valores calculados manualmente).	39
Tabela 3 – Número de bolas necessárias para se ter uma cobertura da Figura 3.4 de acordo com o raio (Valores obtidos a partir do <i>MATLAB</i>).	41
Tabela 4 – Número de bolas necessárias para se ter uma cobertura da Figura 3.8b de acordo com o raio (Valores obtidos a partir do <i>MATLAB</i>).	43
Tabela 5 – Número de bolas necessárias para se ter uma cobertura da Figura 3.11 de acordo com o raio (Valores obtidos a partir do <i>MATLAB</i>).	46
Tabela 6 – Número de bolas em função do raio.	57

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	21
1	GEOMETRIA FRACTAL E SUAS APLICAÇÕES	23
1.1	Contexto Histórico	23
1.2	Aplicações da Geometria Fractal	25
2	NOÇÕES DE TOPOLOGIA	29
2.1	Métrica	29
2.2	Espaços Métricos	30
2.3	Bolas e Esferas	30
2.4	Cobertura:	32
3	DIMENSÃO FRACTAL DE <i>BOX-COUNTING</i>	33
3.1	Aproximação da Dimensão Fractal de <i>Box-Counting</i> pelo Método dos Mínimos Quadrados	37
3.2	Uso do <i>Software MATLAB</i> para Aproximação da Dimensão de <i>Box-Counting</i>	40
	CONSIDERAÇÕES FINAIS - CONCLUSÕES	47
	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICES	51
	APÊNDICE A – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	53
	APÊNDICE B – <i>MATLAB</i>	55
	APÊNDICE C – EXEMPLO 3.3	59
	APÊNDICE D – EXEMPLO 3.4	61
	APÊNDICE E – EXEMPLO 3.5	63

INTRODUÇÃO

Ao discorrer sobre Geometria, o matemático polonês Benoit Mandelbrot ilustra que “nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos e as cascas das árvores não são lisas, tampouco os raios se deslocam em linha reta¹”(MANDELBROT, 1977, p.1, tradução nossa), por essa razão torna-se extremamente difícil estudar as formas naturais por meios convencionais como a Geometria Euclidiana, que se baseia nos axiomas, definições e postulados elaborados por Euclides.

Barbosa (2005) afirma que Mandelbrot definiu como sendo fractais os objetos matemáticos que apresentam como principal característica a autossimilaridade.

Ademais, Barbosa (2005) elucida que o surgimento da Geometria Fractal se deu por volta da década de 1970 quando Mandelbrot, ao trabalhar com certo ruído em linhas telefônicas, percebeu um padrão familiar que se assemelhava a uma antiga obra do matemático Georg Cantor, chamada poeira de Cantor. Desde então, Mandelbrot começou a buscar padrões, muitas vezes difíceis de se perceber, e estudá-los, buscando uma maneira de formalizar essa nova ciência.

Este trabalho tem como objetivos: apresentar o contexto histórico relativo ao surgimento da geometria fractal e algumas de suas aplicações; explicar os conceitos de métrica métrica, espaços métricos, bolas e esferas; definir e calcular a fórmula geral da dimensão fractal de *Box-Counting*; utilizar o método dos mínimos quadrados para a obtenção de uma aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting*; exemplificar o cálculo da dimensão fractal de *Box-Counting* a partir da fronteira dos Brasil e do município de Anápolis, Goiás, Brasil.

Durante a elaboração do estudo, as pesquisas foram referendadas em várias bibliografias, incluindo obras, dissertações de teses publicadas por cientistas, e artigos acadêmicos encontrados em sites especializados a essa temática.

Para facilitar o entendimento dos conceitos apresentados, o trabalho foi dividido em três capítulos. O Capítulo 1 destina-se ao conhecimento da Geometria Fractal, suas aplicações, sua importância, e a história do seu surgimento.

Já no Capítulo 2 é feita uma revisão acerca de noções de topologia com informações sobre conceitos dentro dessa área como métrica, espaços métricos, bolas e esferas e coberturas, objetivando trazer uma base conceitual para as considerações no estudo da dimensão fractal de *Box-Counting*.

Por fim, no Capítulo 3 destina-se à definição de dimensão fractal, traz o conceito de dimensão fractal de *Box-Counting*, como fazer uma aproximação dessa dimensão utilizando o

¹ Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.

método dos mínimos quadrados manualmente e por meio do *software MATLAB*.

1 GEOMETRIA FRACTAL E SUAS APLICAÇÕES

Neste capítulo realiza-se uma breve explicação sobre o conceito de Geometria Fractal, sua história, a razão de seu surgimento e o porquê de ser considerada uma geometria não euclidiana. Na sequência apresenta-se algumas aplicações dessa ciência, tais como em obras arquitetônicas, no cálculo da dimensão de bacias hidrográficas, na diferenciação entre tecidos humanos saudáveis ou doentes e nos padrões encontrados na bolsa de valores.

1.1 Contexto Histórico

Azevedo e Christofletti (2007) afirmam que o surgimento da geometria ocorreu no Egito Antigo a partir da necessidade de medição de terras próximas ao rio Nilo, mas a região em que mais se propiciou o desenvolvimento desse campo da matemática foi a Grécia, com grandes filósofos e matemáticos como Aristóteles, Arquimedes, Pitágoras, Euclides e muitos outros que contribuíram para o crescimento dessa ciência magnífica.

O uso da geometria para o estudo de assuntos relacionados à natureza era, até recentemente, feito por meio de objetos euclidianos, porém observou-se que em várias situações esse método mostrava-se insuficiente ou demasiadamente complexo. Esse fato levou ao surgimento de geometrias não euclidianas, como a geometria esférica, elíptica e hiperbólica, que negavam o 5º postulado de Euclides¹ e que possibilitaram o surgimento de instrumentos como o GPS (Sistema de Posicionamento Global), que é usado para aumentar a eficiência do cálculo da rota mais curta quando se quer locomover de um lugar para outro.

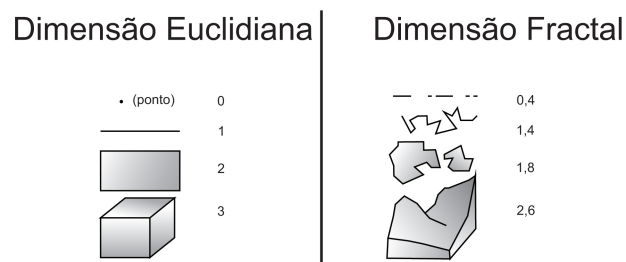
Barbosa (2005) afirma que, utilizando-se do termo latino *fractus*, que significa quebrar, criar fragmentos irregulares, Bennoit Mandelbrot, por volta do ano 1975, nomeou fractais os objetos que, ao serem analisados, constituem uma imagem de si próprios em cada uma de suas partes, em outras palavras, são objetos que possuem a habilidade de autossimilaridade ou autossemelhança, ainda que apresentem aspectos de uma imagem irregular.

Nascimento, Silva e Maciel (2012) afirmam que a geometria fractal é chamada não euclidiana em razão de nenhum dos cinco postulados de Euclides ser satisfeito por ela. A diferença entre a geometria fractal e a euclidiana encontra-se na definição de dimensão. Assis et al. (2008) define a dimensão euclidiana como sendo a representação do número de coordenadas necessárias para descrever uma forma euclidiana. Por exemplo uma coordenada descreve uma

¹ E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (EUCLIDES, 2009)

linha, duas coordenadas um plano e três coordenadas um volume. Ao se tratar de geometria fractal, Silva e Souza (2010) afirmam que o cálculo da dimensão fractal leva em conta que a dimensão de um objeto vai depender do seu formato, grau de irregularidade, aspereza e fragmentação, e também, do espaço que o objeto ocupa no espaço métrico em que está inserido. A dimensão Euclidiana é dada por números inteiros, enquanto a dimensão fractal permite que a dimensão do objeto seja fracionária, onde sua variação se dá de acordo com as irregularidades do mesmo. A Figura 1.1 exibe uma exemplificação de ambas.

Figura 1.1 – Comparação entre Dimensão Euclidiana e Dimensão Fractal.



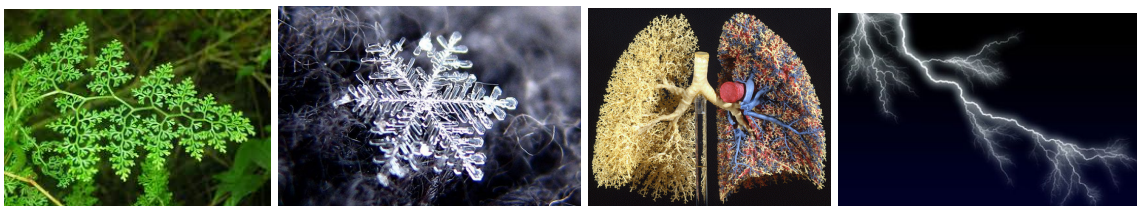
Fonte: Siqueira (2005).

A partir das palavras de Siqueira (2005), o surgimento da geometria fractal se deu em razão da necessidade de um conceito de dimensão que tornasse possível explicar as diversas formas encontradas na natureza como nuvens, montanhas, turbulências, árvores, e outros.

Apesar de diversos estudiosos terem observado padrões dentro e fora da matemática, foi o matemático Benoit Mandelbrot quem se empenhou em estudá-los e criar uma maneira de formalizar esses estudos. Tudo começou por volta de 1961, na época em que Mandelbrot trabalhava na empresa IBM, *International Business Machines Corporation* quando, de acordo com Barbosa (2005) ele fez uso de um antigo trabalho de Georg Cantor para resolver um problema em de ruído nas linhas telefônicas.

Na Figura 1.2, são apresentados alguns exemplos de padrões encontrados em meio natural, que podem ser vistos como inspiração para a construção de fractais matemáticos.

Figura 1.2 – Exemplos de fractais.



(a) Folha.

(b) Floco de Neve.

(c) Pulmão Humano.

(d) Raio.

Fonte: Marciano (2020); Kljatov (2017); Sousa (2013).

É possível observar na fala de Richard Bentley (estudiosos do século XVII) citada por

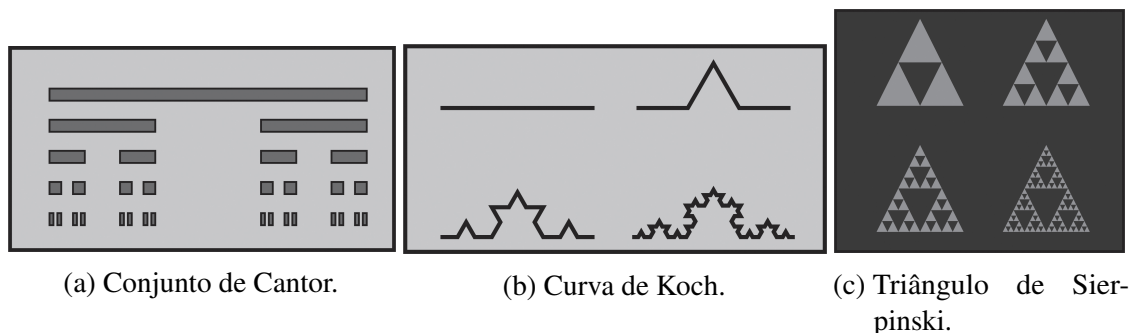
Mandelbrot (1977), que realizar comparações entre a natureza e as formas euclidianas pode ser considerado uma ideia obsoleta.

Toda pulcritude é relativa... Não devemos... acreditar que as margens do oceano estejam realmente deformadas, porque não têm a forma de um baluarte regular; nem que as montanhas estão fora de forma, porque não são pirâmides exatas ou cones; nem que as estrelas sejam colocadas de modo inadequado, porque não estão todas situadas a uma distância uniforme. Essas não são irregularidades naturais, mas apenas no que diz respeito às nossas fantasias, nem são inconvenientes para os verdadeiros usos da vida e os desígnios do homem estar na terra. (MANDELBROT, 1977, p. 6, tradução nossa)²

O conceito de Geometria Fractal pode ser descrito como sendo a ciência que estuda os fractais. Essa ciência possui aplicabilidades em diversas áreas do saber, entre as quais pode-se citar a medicina, a biologia, as ciências computacionais, a geografia, e a economia.

Além das formas encontradas na natureza, existem fractais que podem ser construídos matematicamente, através de parâmetros como é o caso do Conjunto de Cantor (também chamado de Poeira de Cantor), da Curva de Peano, da Curva de Hilbert, da Curva de Koch, do Triângulo de Sierpinski e vários outros. A Figura 1.3 exibe imagens de alguns desses fractais.

Figura 1.3 – Fractais construídos matematicamente.



Fonte: Barbosa (2005).

Observe que, a partir da Figura 1.3, cada um desses fractais segue um tipo de padrão, e que ao se analisar partes menores do conjunto, pode-se encontrar imagens semelhantes à forma maior.

1.2 Aplicações da Geometria Fractal

A Geometria Fractal é a ciência que estuda os objetos conhecidos como fractais, o método utilizado para esse estudo se dá através do cálculo da dimensão do objeto, que, diferen-

² All pulchritude is relative.... We ought not... to believe that the banks of the ocean are really deformed, because they have not the form of a regular bulwark; nor that the mountains are out of shape, because they are not exact pyramids or cones; nor that the stars are unskillfully placed, because they are not all situated at uniform distance. These are not natural irregularities, but with respect to our fancies only; nor are they inconvenient to the true uses of life and the designs of man's being on earth. (MANDELBROT, 1977)

temente da dimensão euclidiana, leva em consideração o nível de irregularidade, rugosidade e o espaço ocupado pelo objeto.

Os métodos para estimativa da dimensão fractal podem ser diversos. De acordo com o objetivo do estudo pode haver um método específico a ser empregado, Backes (2006) Traz alguns exemplos de métodos de cálculo da dimensão fractal como *Box-Counting*, Hausdorff, Massa-Raio, Intersecção Acumulativa, *Dividers* e Bouligand-Minkowski.

As aplicações desta área da matemática podem ser muito diversificadas, pois por meio dela existe a possibilidade de estudo de objetos ditos autossemelhantes e também objetos que não o são. A abrangência dessa ciência pode abarcar estudos em geografia, medicina, biologia, arquitetura e diversas outras áreas. Nesta seção destaca-se os usos da Geometria Fractal que se estendem para além da matemática pura.

Para a estimativa, avaliação e caracterização de formas geomorfológicas irregulares, da rede de drenagem da bacia hidrográfica do Caeté, em Alfredo Wagner, Santa Catarina, Brasil, Vestena e Kobiyama (2010) fazem uso do método do cálculo da dimensão fractal através do método de *Box-Counting*. Segundo os autores, a importância da dimensão fractal da rede de drenagem se dá em razão da possibilidade de se fazer a caracterização das propriedades da escala e também por indicar a associação entre medida e escala, tendo em vista que as medidas geomorfológicas, o comprimento dos cursos fluviais, a densidade de drenagem e a declividade são geralmente mensurados em mapas e utilizados para a realização do planejamento do manejo da bacia hidrográfica.

Uma das obras arquitetônicas mais famosas de Gaudí, a "Sagrada Família" é dotada de diversas qualidades que a tornam única, como sua estrutura, leveza e boa acústica. Em seu projeto foram utilizadas formas euclidianas como hiperboloides, paraboloides, helicoides e elipsoides, porém isso não torna a geometria euclidiana ideal para os cálculos das dimensões dessa monumental construção. Por conta da rugosidade e do estilo de sua infraestrutura peculiar, é evidente que a geometria fractal melhor se adapta à sua representação. (SAMPER; HERRERA, 2015)

Velaquez et al. (2014) buscou estudar padrões obtidos em artérias de suínos, para isso foi injetada uma substância em parte da amostra e placebo em outra para ser utilizada como grupo controle. Em seguida verificou, do ponto de vista geométrico, a partir do método de *Box-Counting*, a diferença entre o estado de saúde das artérias dos indivíduos, em restenosadas ou normais, a partir do espaço ocupado por elas.

O uso da dimensão fractal se estende, também, para a área da economia. Miguel (2005) traz uma comparação entre a dimensão fractal dos gráficos da série *IBEX35*³ e as generalizações do movimento browniano⁴ fracionário e L-estacionário, a fim de analisar as consequências ao

³ Índice de referência da Bolsa de Madrid, gerido pela Bolsa y Mercados Españoles (BME).

⁴ Miguel (2005) define o movimento browniano clássico como sendo um processo que começa na origem, em que os incrementos são independentes e identicamente distribuídos de acordo com uma normal com média zero e

descrever como um processo estocástico esse tipo de séries temporais.

Em medicina, Rodriguez et al. (2012) caracteriza, através do método de *Box-Counting*, o ventrículo esquerdo durante a dinâmica cardíaca em busca de encontrar padrões entre aqueles que, possivelmente estariam saudáveis ou doentes. A partir disso, em sua pesquisa, conclui que as dimensões fractais dos ventrículos, durante a dinâmica cardíaca, classificados clinicamente como normais ou anormais (levemente, moderadamente ou severamente alterados) sofrem significativas variações.

Ainda em medicina Velasquez et al. (2020) utiliza a geometria fractal para caracterizar o grau de irregularidade de células sanguíneas falsiformes em humanos, seu objetivo ao realizar tal pesquisa foi de contribuir para a geração de um novo sistema de medida que torne mais fácil o reconhecimento dessas células para assim possibilitar um diagnóstico mais preciso de doenças.

Assim, observa-se que os estudos envolvendo a geometria fractal são inúmeros e que a cada dia novas pesquisas se iniciam em busca de formas de utilizar essa ciência para o benefício da humanidade.

2 NOÇÕES DE TOPOLOGIA

O objetivo deste capítulo é trazer ao leitor algumas noções de topologia, tais como métricas, espaços métricos, bolas, esferas e coberturas. A finalidade de apresentar esse conteúdo é tornar mais compreensíveis os conceitos que virão a ser apresentados no Capítulo 3.

2.1 Métrica

Segundo Lima (1993) uma métrica em um conjunto M é definida como uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada par de elementos x, y , pertencentes a M , a um número real, $d(x, y)$, que recebe o nome de distância de x a y de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer x, y e z pertencentes a M :

$$\begin{aligned} d : M \times M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y). \end{aligned}$$

(I) $d(x, x) = 0$;

(II) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

(III) $d(x, y) = d(y, x)$;

(IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Nos próximos exemplos exibe-se algumas métricas em determinados conjuntos¹:

Exemplo 2.1. *Uma das métricas referentes ao espaço dos números reais \mathbb{R} :*

Dados os pontos x e y pertencentes a \mathbb{R} , uma métrica que define a distância entre eles é:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Exemplo 2.2. *Uma das métricas referentes ao espaço euclidiano \mathbb{R}^2 .*

Dados os pontos z e z' , onde $z = (x, y)$, $z' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Uma métrica que define a distância entre eles é:

$$d(z, z') = \max\{|x - x'|, |y - y'|\}$$

¹ Os exemplos aqui apresentados podem ser encontrados, com mais detalhes, em (LIMA, 1993).

Exemplo 2.3. *Uma das métricas referentes ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n .*

Dados os pontos $A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $B(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ pertencentes a \mathbb{R}^n , uma métrica que define a distância entre eles é:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Exemplo 2.4. *Uma métrica referente ao espaço de funções limitadas² $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, indicado por $B(X; \mathbb{R})$, pode ser definida para duas funções arbitrárias f e g , pertencentes a $B(X; \mathbb{R})$, como sendo:*

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$

Onde *sup* representa o supremo do conjunto de valores.

2.2 Espaços Métricos

Ainda de acordo com Lima (1993) um espaço métrico pode ser definido como sendo um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma métrica definida dentro desse conjunto. Os elementos de um espaço métrico podem ser definidos de forma arbitrária como números, pontos, funções, entre muitos outros. Podemos listar como exemplos de espaços métricos: o espaço euclidiano \mathbb{R}^n ; os espaços vetoriais normados; os produtos cartesianos de espaços métricos; e o espaço das funções; se forem definidas métricas associadas a eles.

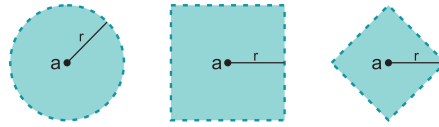
2.3 Bolas e Esferas

Lima (1993) ressalta a importância de compreender os conceitos de bola aberta, bola fechada e esfera no entendimento dos espaços métricos, os quais estão listados a seguir.

Definição 2.1. *Bola Aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor que r , ou seja, $B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}$.*

Exemplo 2.5. *No plano \mathbb{R}^2 , a bola aberta de centro $a = (a_1, a_2)$ e raio r , $B(a, r)$, é o interior de um círculo de centro a e raio r , representado por $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2$, ou o interior de um quadrado de centro a e lado $2r$, representado por: $|x - a_1| < r$ e $|y - a_2| < r$, ou então o interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimento $2r$, representado por $|x - a_1| + |y - a_2| < r$. A representação gráfica dependerá da métrica escolhida.*

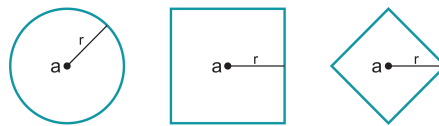
² Uma função real $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se limitada quando existe uma constante $C = C_f > 0$ de modo que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in X$ (LIMA, 1993)

Figura 2.1 – Bola aberta de centro a e raio r .

Fonte: Adaptado de Lima (1993).

Definição 2.2. Esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a;r)$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância igual a r do ponto a , ou seja, $S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}$.

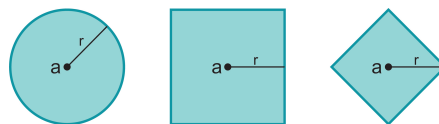
Exemplo 2.6. Do exemplo anterior, a esfera de centro $a = (a_1, a_2)$ e raio r , $S(a, r)$ representa a borda da figura correspondente. O primeiro caso pode ser representado por $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$, o segundo por $|x - a_1| = r$ e $|y - a_2| = r$ e o terceiro caso por $|x - a_1| + |y - a_2| = r$.

Figura 2.2 – Esfera de centro a e raio r .

Fonte: Adaptado de Lima (1993).

Definição 2.3. Bola Fechada de centro a e raio r é o conjunto $B[a;r]$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto a , ou seja, $B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}$.

Exemplo 2.7. Analogamente aos exemplos anteriores, a bola fechada de centro $a = (a_1, a_2)$ e raio r , em \mathbb{R}^2 , $B[a, r]$ é representada pelo interior e a borda de um círculo de centro a e raio r , simbolicamente $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq r^2$; pelo interior e a borda de um quadrado de centro a e lado $2r$, dessa forma $|x - a_1| \leq r$ e $|y - a_2| \leq r$; ou pelo interior e a borda de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimento $2r$, ou seja, $|x - a_1| + |y - a_2| \leq r$.

Figura 2.3 – Bola fechada de centro a e raio r .

Fonte: Adaptado de Lima (1993).

Após definir os conceitos de bola aberta, bola fechada e esfera, pode-se afirmar que uma bola fechada de centro a e raio r é a união da bola aberta de centro a e raio r com a esfera de centro a e raio r , ou seja, $B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r)$

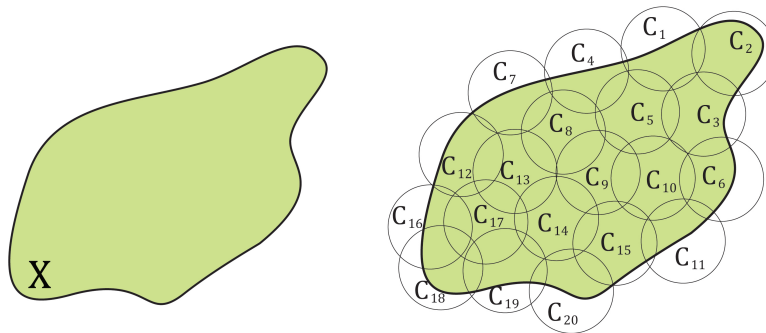
2.4 Cobertura:

Lima (1993) define uma cobertura de um conjunto X :

Definição 2.4. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M , considera-se uma cobertura de X uma família $C = (C_\lambda)_{(\lambda \in L)}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset \bigcup_{(\lambda \in L)} C_\lambda$, ou seja, para cada $x \in X$, existe pelo menos um índice $\lambda \in L = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ tal que $x \in C_\lambda$.*

Exemplo 2.8. *A Figura 2.4b exibe uma cobertura para o conjunto X exibido na Figura 2.4a.*

Figura 2.4 – Conjunto X e um exemplo de cobertura.



(a) Conjunto X

(b) Cobertura do Conjunto X

Fonte: O autor (2022).

Em outras palavras, uma cobertura de X pode ser definida como sendo a família de subconjuntos (C_1, C_2, \dots, C_n) de um espaço métrico M (observe a Figura 2.4b), definidos, também arbitrariamente, tal que dentro dessa família sempre irá existir um conjunto C_λ que contém, pelo menos, um dos elementos de X .

3 DIMENSÃO FRACTAL DE *BOX-COUNTING*

Como observado na seção 1.1 do Capítulo 1, as geometrias Euclidiana e Fractal se diferem na definição de dimensão de cada uma. Assis et al. (2008) relaciona o conceito de dimensão euclidiana a eixos perpendiculares que são utilizados na construção de formas ditas euclidianas como quadrados, retângulos, elipses, paraboloides, etc. Nas palavras de Silva e Souza (2010) ao se tratar de dimensão fractal, a dimensão de um objeto depende do formato e representa o espaço ocupado por uma estrutura no espaço métrico em que está inserida.

Neste capítulo apresenta-se um estudo sobre o cálculo da dimensão fractal de *Box-Counting*, as definições aqui presentes se apoiarão nas obras de Assis et al. (2008) e Falconer (2003).

Para a definição do que é dimensão de *Box-Counting* utiliza-se as concepções apresentados no Capítulo 2, mais especificamente, as definições de bola fechada e cobertura. Vale ressaltar que esse método de cálculo da dimensão fractal pode ser utilizado tanto para figuras autossemelhantes quanto para figuras que não o são.

Definição 3.1. *Dado um espaço métrico M e um conjunto $X \subset M$, (ASSIS et al., 2008) define X como sendo um fractal quando:*

$$N(X, r) \cong K \cdot r^{-D},$$

Onde:

- D é a dimensão fractal de X ;
- $N(X, r)$ é o menor número de bolas fechadas de raio r necessário para se ter uma cobertura de um conjunto X ;
- K é uma constante positiva.

Então, para calcular a fórmula geral da dimensão fractal de *Box-Counting*, D , do conjunto X , pode-se desenvolver a equação:

$$N(X, r) \cong K \cdot r^{-D}$$

$$\ln(N(X, r)) \cong \ln(K \cdot r^{-D})$$

$$\ln(N(X, r)) \cong \ln(K) + \ln(r^{-D})$$

$$\ln(N(X, r)) \cong -D \cdot \ln(r) + \ln(K) \quad (3.1)$$

$$D \cong \frac{-\ln(N(X, r)) + \ln(K)}{\ln(r)} \quad (3.2)$$

A dimensão fractal de *Box-Counting*, é definida pelo limite da equação 3.2 quando o raio tende a zero.

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-\ln(N(X, r)) + \ln(K)}{\ln(r)}$$

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{-\ln(N(X, r))}{\ln(r)} + \frac{\ln(K)}{\ln(r)} \right)$$

Sabe-se que o $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(K)}{\ln(r)} = 0$.

Definição 3.2. *Seja um espaço métrico M , o menor número de bolas fechadas de raio r necessário para se ter uma cobertura de um conjunto X , $X \subset M$ e $r > 0$, é representado por $N(X, r)$.*

A dimensão fractal de Box-Counting de X é

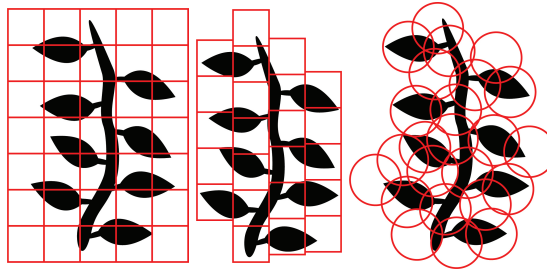
$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{-\ln(N(X, r))}{\ln(r)} \right]. \quad (3.3)$$

Esse método de cálculo de dimensão recebe o nome de dimensão de *Box-Counting*. De acordo com Silva e Souza (2010), pode ser aplicada a qualquer tipo de estrutura colocada sobre uma malha.

O número de bolas poderá variar de acordo com a métrica escolhida. Tomando-se o caso em que seja utilizado um *software* para a realização desse cálculo, o uso de uma imagem de boa qualidade pode trazer valores mais aproximados da dimensão fractal.

Quando possível estabelecer uma representação da cobertura, sua estrutura dependerá da métrica escolhida e da forma em que estarão dispostas as bolas. Conforme aponta a Figura 3.1, o formato e a posição das bolas podem causar certa variação no número de bolas necessárias para se ter uma cobertura, com a possibilidade de acarretar variações quanto ao valor da dimensão a ser calculada nos casos em que há limitações quanto à redução do comprimento do raio de cada bola.

Figura 3.1 – Diferentes coberturas sobre objeto.



Fonte: O Autor (2022).

Para os cálculos presentes nesse capítulo utilizou-se a métrica

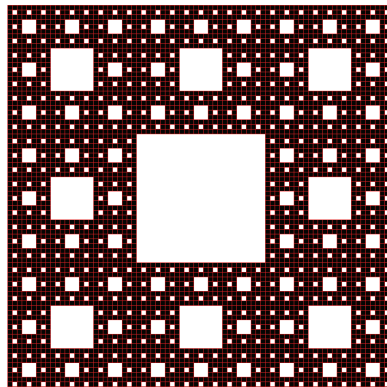
$$d(z, z') = \max\{|x - x'|, |y - y'|\},$$

onde $z = (x, y)$, $z' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Sendo a representação geométrica da bola, um quadrado.

Exemplo 3.1. *O tapete de Sierpinski apresentado na Figura 3.2 tem dimensão de Box-Counting, aproximadamente, 1,893.*

O Tapete de Sierpinski (apresentado na Figura 3.2) consiste na divisão de um quadrado em 9 partes, igualmente quadradas, e na remoção da parte central, em seguida divide-se cada um dos quadrados restantes em outras 9 partes quadradas e retira-se a parte localizada no centro de cada um deles, e repete-se esse processo infinitas vezes.

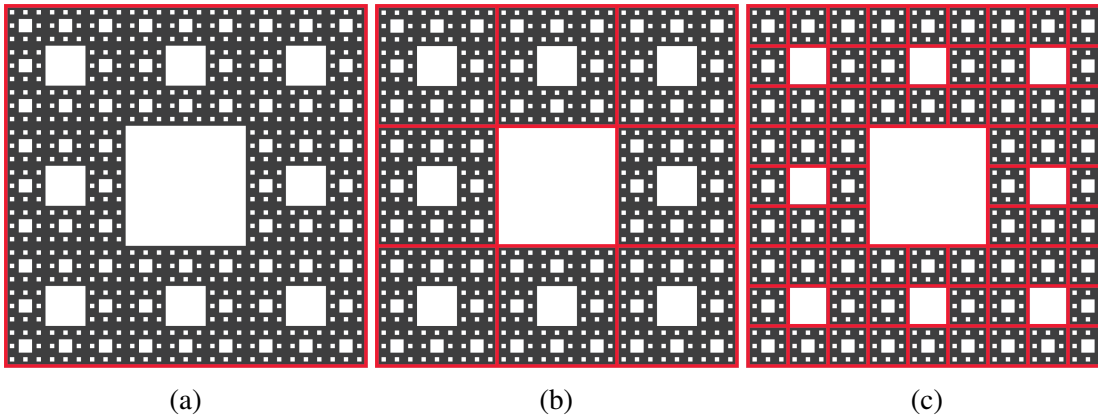
Figura 3.2 – Tapete de Sierpinski.



Fonte: Adaptado de Barbosa (2005).

Para o cálculo da dimensão fractal de *Box-Counting*, primeiramente deve-se definir coberturas para o conjunto, de modo que o raio das bolas que as formam seja cada vez menor como se observa na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Coberturas sobre Tapete de Sierpinski.



Fonte: Adaptado de Barbosa (2005).

Na sequência considera-se a medida do lado da figura como sendo 1 unidade de comprimento. A partir disso foi definido o raio inicial das bolas medindo 1 unidade, sendo necessário 1 bola para a cobertura (Figura 3.3a). Em seguida o raio definido foi de $1/3$ de unidade, sendo preciso 8 bolas para a cobertura (Figura 3.3b). O próximo raio foi de $1/9$ de unidade, sendo o número de bolas necessário igual a 64 para se ter uma cobertura da figura (Figura 3.3c). Para bolas de raio $1/3^n$ de unidade, contando apenas as bolas que terão intersecção com a figura, serão necessárias 8^n bolas para se ter uma cobertura. A partir disso, pode-se construir a Tabela 1:

Tabela 1 – Número de bolas necessárias para se ter uma cobertura da Figura 3.2 de acordo com o raio.

i	r_i	$N(X, r_i)$
1	1	1
2	$1/3$	8
3	$1/3^2$	8^2
n	$1/3^n$	8^n

Fonte: O autor (2022).

Portanto:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{-\ln(N(X, r))}{\ln(r)} \right]$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-\ln(8^n)}{\ln\left(\frac{1}{3^n}\right)} \right]$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-\ln(8^n)}{-\ln(3^n)} \right]$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln(8^n)}{\ln(3^n)} \right]$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n \ln(8)}{n \ln(3)} \right]$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln(8)}{\ln(3)} \right] = 1,8927\dots$$

Assim, a dimensão fractal da Figura 3.2 é, aproximadamente, 1,893.

3.1 Aproximação da Dimensão Fractal de *Box-Counting* pelo Método dos Mínimos Quadrados

Existem dificuldades para o cálculo da dimensão fractal de *Box-Counting*, dentre elas fazer com que o raio das bolas tenda a zero e estabelecer uma contagem para o número de bolas. Não há necessariamente uma equação que defina o número de bolas em relação ao raio. Além disso, existem limitações físicas que impossibilitam que o raio tenda a zero e seja possível fazer a contagem das bolas, como no caso de uma contagem feita manualmente ou do uso de um *software* que faça essa contagem de forma automática. Por essa razão, faz-se necessário buscar uma forma de encontrar uma aproximação do valor da dimensão utilizando um número finito de valores para o raio e para o número de bolas.

Uma forma de resolver essa questão pode ser comparar a Equação 3.1 a uma função do 1º grau, onde $\ln(r)$ é a variável independente, $\ln(K)$ é o coeficiente linear, $\ln(N(X, r))$ é a variável dependente e a dimensão de *Box-Counting*, D , é o oposto do coeficiente angular.

$$\left. \begin{aligned} \ln(N(X, r)) &= -D \cdot \ln(r) + \ln(K) \\ y &= a \cdot x + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow D = -a.$$

Para determinar essa função, optou-se pelo método dos mínimos quadrados, que consiste em fazer um ajuste de curvas utilizando uma quantidade finita de pontos $(\ln(r_i), \ln(N(X, r_i)))$. O Apêndice A apresenta de forma mais detalhada o método dos mínimos quadrados.

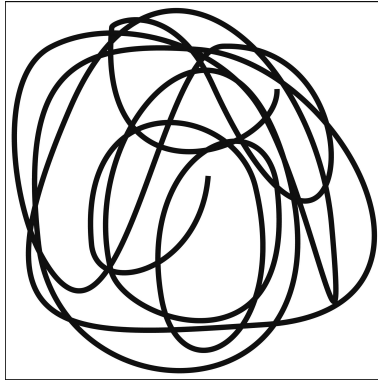
Nos próximos exemplos, para o cálculo da dimensão de *Box-Counting*, utiliza-se a métrica

$$d(z, z') = \max\{|x - x'|, |y - y'|\}$$

onde $z = (x, y)$, $z' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, e a representação geométrica da bola é um quadrado.

Exemplo 3.2. Utilizando o método dos mínimos quadrados, para aproximação, a Figura 3.4 (desenho construído aleatoriamente para exemplificação) apresenta, dimensão fractal de Box-Counting aproximada de 1,8927.

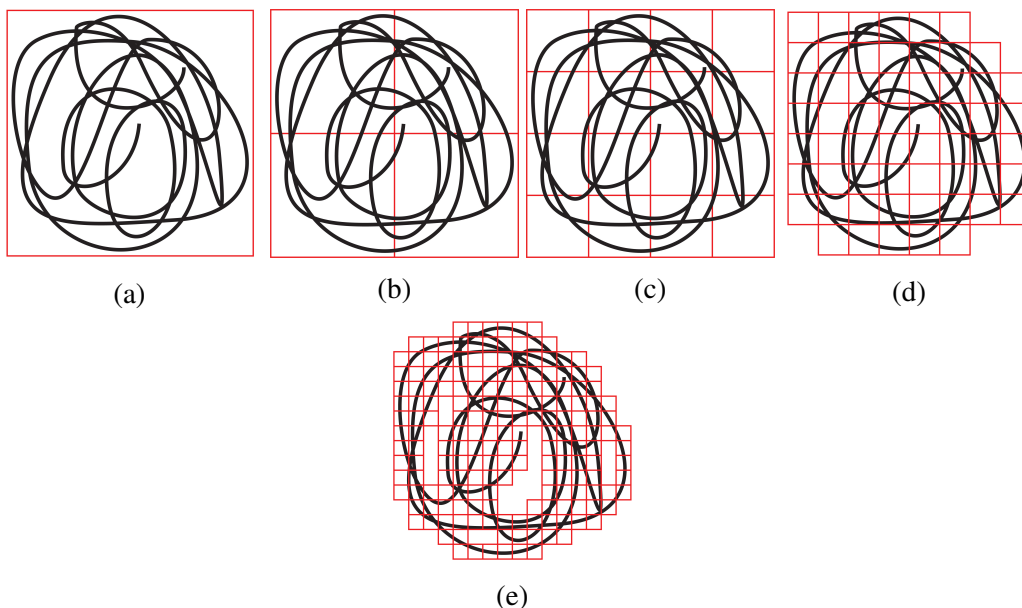
Figura 3.4 – Traço aleatório.



Fonte: O autor (2022).

Para calcular a dimensão fractal da Figura 3.4 considera-se a medida do lado da figura como sendo 1 unidade de comprimento. Inicialmente colocou-se sobre diferentes malhas quadriculadas, com raio inicial das bolas medindo 1 unidade, sendo necessário 1 bola para a cobertura (Figura 3.5a). Em seguida o raio definido foi de $1/2$ unidade, sendo preciso 4 bolas para a cobertura (Figura 3.5b). O próximo raio foi de $1/4$ de unidade, sendo o número de bolas necessário igual a 16 (Figura 3.5c). O raio seguinte foi de $1/8$ de unidade, sendo preciso 57 bolas para a cobertura (Figura 3.5d). Por fim o raio utilizado foi de $1/16$ de unidade e foram necessárias 187 bolas para a cobertura (Figura 3.5e).

Figura 3.5 – Figura sobre malha quadriculada.



Fonte: O autor (2022).

Os valores r_i e $N(r_i)$ inseridos na Tabela 2 apresentam valores do raio (r_i) e do menor número de bolas ($N(r_i)$) necessárias para se ter uma cobertura do traço exposto na Figura 3.4, também são apresentados os logaritmos naturais desses valores.

Tabela 2 – Número de bolas necessárias para se ter uma cobertura da Figura 3.4 de acordo com o raio (Valores calculados manualmente).

i	r_i	$N(r_i)$	$\ln(r_i)$	$\ln(N(r_i))$
1	1	1	0	0
2	0,5	4	-0,6931	1,3862
3	0,25	16	-1,3862	2,7725
4	0,125	57	-2,0794	4,0430
5	0,0625	187	-2,7725	5,2311

Fonte: O autor (2022).

Calcula-se, então, utilizando o método dos mínimos quadrados, a função do 1º grau, $y = ax + b$, que melhor se ajusta aos pontos $(\ln(r_i), \ln(N(r_i)))$ dados na Tabela 2.

1. Coeficiente angular da função:

$$a = \frac{n \cdot \sum(x_i \cdot y_i) - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a = \frac{5 \cdot (-27,7155) - (-6,9314) \cdot 13,4330}{5 \cdot 14,4135 - 48,0453}$$

$$a = \frac{-45,4669}{24,0226}$$

$$a = -1,8927$$

2. Coeficiente linear da função:

$$b = \frac{\sum y_i - (\sum x_i) \cdot a}{n}$$

$$b = \frac{13,4330 - (-6,9314) \cdot (-1,89)}{5}$$

$$b = \frac{13,4330 - 13,1189}{5}$$

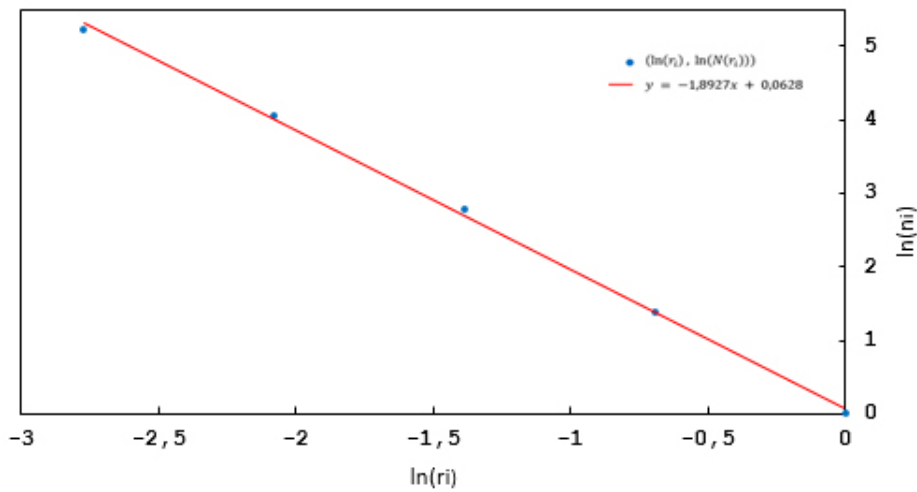
$$b = 0,0628$$

Assim, a função do primeiro grau, cujo gráfico está exposto na Figura 3.6, é:

$$y = -1,8927x + 0,0628.$$

Portanto, a dimensão fractal da Figura 3.4 é, aproximadamente, 1,8927.

Figura 3.6 – Gráfico: Aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* para o Exemplo 3.2.



Fonte: O autor (2022).

Barroso et al. (1987) afirma que para analisar se se trata de um bom ajuste da reta aos pontos, pode-se calcular o valor do coeficiente de determinação (R^2):

$$R^2 = \frac{[\sum(x_i \cdot y_i) - (\sum x_i \cdot \sum y_i)/n]^2}{[\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n] \cdot [\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2/n]}$$

$$R^2 = \frac{[(-27,7155) - ((-6,9315) \cdot 13,4330)/5]^2}{[14,4136 - 48,0453/5] \cdot [53,3198 - 180,4466/5]}$$

$$R^2 = \frac{82,6896}{82,7844}$$

$$R^2 = 0,9989$$

O valor do coeficiente de determinação é, aproximadamente, 0,9989. Pode-se, então, concluir que a função encontrada é um bom ajuste linear para os pontos dados.

3.2 Uso do *Software MATLAB* para Aproximação da Dimensão de *Box-Counting*

Nesta seção apresenta-se alguns exemplos do cálculo da dimensão fractal de *Box-Counting* com aproximação pelo método dos mínimos quadrados utilizando o *software MATLAB*.

O *MATLAB* é um *software* que se destina, principalmente, ao cálculo numérico. A linguagem utilizada para criação e cálculos de funções se baseia em operações com matrizes, e seu uso se estende para diversas áreas de atuação profissional, entre as quais se pode citar a matemática, a estatística, a geografia, a economia, a física e a engenharia. O *MATLAB* conta, ainda, com

um grande número de funcionalidades, desde cálculos simples até os mais complexos, plotagem de gráficos, criação de funções, processamento de dados, dentre outros (MATHWORKS, 2022). A licença utilizada para a realização deste trabalho foi uma versão gratuita destinada a testes.

Nos exemplos 3.3, 3.4 e, 3.5, apresentados a seguir, utilizou-se o programa *boxcount* desenvolvido por Moisy (2022), para o cálculo do menor número de bolas, de acordo com o raio, para se ter coberturas dos traços expostos nas figuras. O programa *boxcount* fornece os valores do raio de acordo com o número de pixels do lado da figura.

Além disso foram utilizados os códigos apresentados no Apêndice B para os cálculos da aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting*.

No Exemplo 3.2 é apresentado o cálculo da aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* por meio de cálculos feitos manualmente. No mais, as divisões em raios diferentes e a contagem de bolas também foram realizadas de forma manual. No Exemplo 3.3 essa aproximação é feita através do *MATLAB*.

Exemplo 3.3. *O Cálculo da aproximação da dimensão fractal de Box-Counting do desenho apresentado no Exemplo 3.2, usando o método dos mínimos quadrados no MATLAB é, aproximadamente, $D = 1,8807802$.*

A Tabela 3 apresenta os valores obtidos por meio do programa *boxcount*, dos raios, do número de bolas necessário para cobrir o desenho inserido na Figura 3.4, e também os logaritmos naturais desses valores:

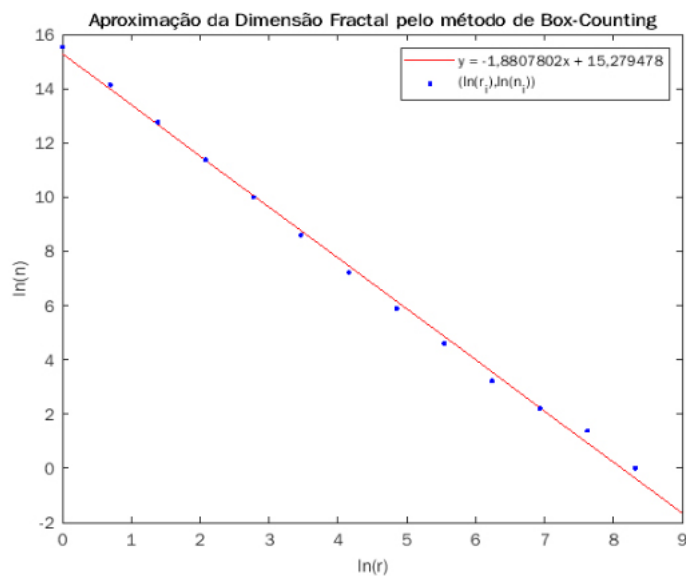
Tabela 3 – Número de bolas necessárias para se ter uma cobertura da Figura 3.4 de acordo com o raio (Valores obtidos a partir do *MATLAB*).

i	r _i	N(r _i)	ln(r _i)	ln(N(r _i))
1	1	5578942	0	15.5345097106453
2	2	1394761	0.693147180559945	14.1482336323947
3	4	349281	1.38629436111989	12.7636320348122
4	8	87616	2.07944154167984	11.3807189086481
5	16	21904	2.77258872223978	9.99442454752823
6	32	5476	3.46573590279973	8.60813018640834
7	64	1369	4.15888308335967	7.22183582528845
8	128	361	4.85203026391962	5.88887795833288
9	256	100	5.54517744447956	4.60517018598809
10	512	25	6.23832462503951	3.2188758248682
11	1024	9	6.93147180559945	2.19722457733622
12	2048	4	7.6246189861594	1.38629436111989
13	4096	1	8.31776616671934	0

Fonte: O autor (2022).

Os valores verificados na Tabela 3 foram utilizados para obter uma aproximação da dimensão fractal utilizando o método dos mínimos quadrados. O gráfico construído com a reta e os pontos é evidenciado na Figura 3.7.

Figura 3.7 – Gráfico: Aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* da Figura 3.4.



Fonte: O autor (2022).

Os comandos utilizados para esses cálculos encontram-se no Apêndice C.

Exemplo 3.4. O Cálculo da aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* do esboço na Figura 3.8b, pelo método dos mínimos quadrados é, aproximadamente, 1,8842.

Neste exemplo realiza-se a aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* do território brasileiro a partir de um croqui (Figura 3.8b) do contorno do território do Brasil, construído a partir de uma imagem de satélite fornecida pelo *site Google Earth*.

Figura 3.8 – Território brasileiro.



(a) Imagem obtida via satélite do Território Brasileiro (b) Esboço construído pelo autor

Fonte: Earth (2022).

Fonte: O autor (2022).

A Tabela 4 aponta os valores dos raios e do número de bolas necessário para cobrir a Figura 3.8b, além disso, são lançados os logaritmos naturais dos valores obtidos no programa:

Tabela 4 – Número de bolas necessárias para se ter uma cobertura da Figura 3.8b de acordo com o raio (Valores obtidos a partir do *MATLAB*).

i	r_i	$N(r_i)$	$\ln(r_i)$	$\ln(N(r_i))$
1	1	5840301	0	15.5802928945721
2	2	1464407	0.693147180559945	14.1969609403315
3	4	366915	1.38629436111989	12.8128854925821
4	8	91730	2.07944154167984	11.4266047585037
5	16	23004	2.77258872223978	10.0434233928336
6	32	5751	3.46573590279973	8.65712903171375
7	64	1476	4.15888308335967	7.29709100516042
8	128	378	4.85203026391962	5.93489419561959
9	256	99	5.54517744447956	4.59511985013459
10	512	30	6.23832462503951	3.40119738166216
11	1024	9	6.93147180559945	2.19722457733622
12	2048	4	7.6246189861594	1.38629436111989
13	4096	1	8.31776616671934	0

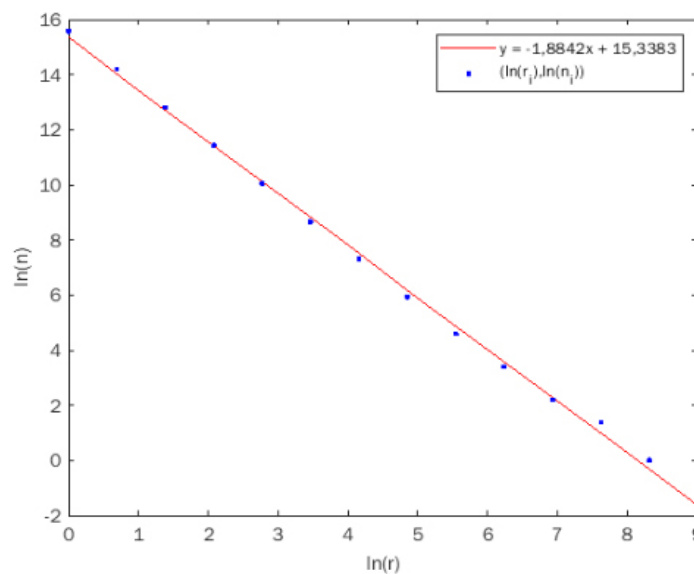
Fonte: O autor (2022).

A partir desses valores calculou-se, por meio do método dos mínimos quadrados, utilizando-se do *software MATLAB* (ver Apêndice D), obtendo o valor do coeficiente angular ($a = -1,8842$), o valor do coeficiente linear ($b = 15.3383$), e o valor do coeficiente de determinação ($R^2 = 0.9979$), da função que melhor se ajusta aos pontos $(\ln(r_i), \ln(n_i))$.

Recordando-se da relação $a = -D$, tem-se que a dimensão fractal, D , do esboço do território brasileiro é, aproximadamente, 1,8842.

Por fim, com o objetivo de verificar o ajuste de forma visual, foi feita a plotagem do gráfico com os valores dos pontos e da função obtida, também através do *MATLAB*. Observe a Figura 3.9:

Figura 3.9 – Gráfico: Aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* para o Exemplo 3.4.



Fonte: O autor (2022).

Dessa forma, pode-se observar que a função possui um bom ajuste em relação aos pontos.

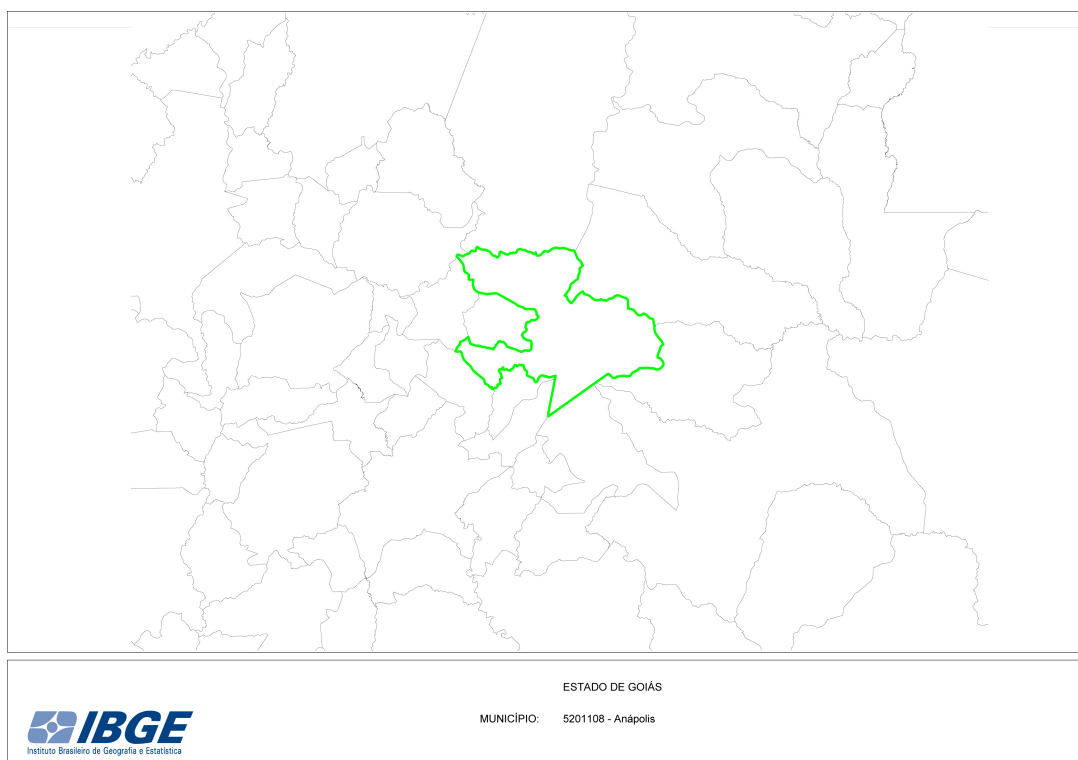
Exemplo 3.5. Também, a Figura 3.10 permite calcular uma aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* do contorno do território do município de Anápolis, Goiás. Logo, utilizando o método dos mínimos quadrados e os valores obtidos através do programa *boxcount*, o valor da dimensão é, aproximadamente, 1.835620.

Nessa senda, ressalta-se que o município de Anápolis se localiza no interior do Estado de Goiás, a apenas 67,6 quilômetros da capital, Goiânia. A cidade está em constante crescimento devido à presença do Distrito Agroindustrial de Anápolis (DAIA), que segundo Goiás (2022) é o maior e mais antigo parque industrial do estado.

A Figura 3.10, obtida a partir do site do Instituto Brasileiro de Geografia¹ e Estatística (IBGE), apresenta as demarcações territoriais do município de Anápolis, Goiás.

¹ <https://portaldemapas.ibge.gov.br/porta1.php#mapa10897>. Acesso em: 20 fev 2022.

Figura 3.10 – Fronteira territorial do município de Anápolis, Goiás.



Fonte: IBGE (2022).

Para iniciar os cálculos de aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* do contorno dos limites territoriais do município de Anápolis, é necessário isolar a imagem do contorno, como se observa na Figura 3.11.

Figura 3.11 – Contorno do território município de Anápolis, Goiás.



Fonte: O autor (2022).

A Figura 5 contém uma tabela com um número finito de raios e os respectivos valores para o número de bolas necessárias para se ter coberturas do contorno do Município de Anápolis. Os dados apresentados foram obtidos por meio do *MATLAB* (ver Apêndice E).

Tabela 5 – Número de bolas necessárias para se ter uma cobertura da Figura 3.11 de acordo com o raio (Valores obtidos a partir do *MATLAB*).

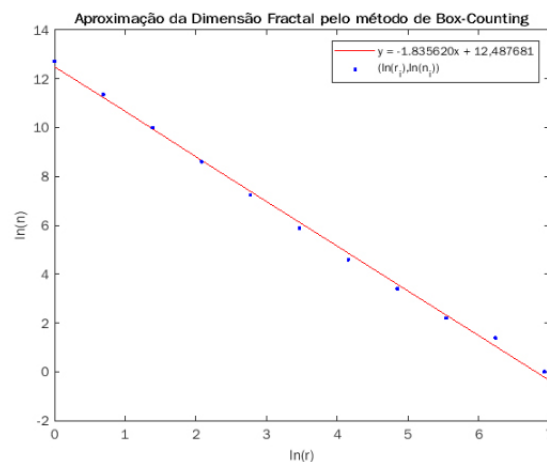
i	r_i	$N(r_i)$	$\ln(r_i)$	$\ln(N(r_i))$
1	1	335039	0	12.7220022219416
2	2	85693	0.693147180559945	11.3585264209698
3	4	21928	1.38629436111989	9.99551963798262
4	8	5494	2.07944154167984	8.61141186665522
5	16	1394	2.77258872223978	7.23993259132047
6	32	357	3.46573590279973	5.87773578177964
7	64	99	4.15888308335967	4.59511985013459
8	128	30	4.85203026391962	3.40119738166216
9	256	9	5.54517744447956	2.19722457733622
10	512	4	6.23832462503951	1.38629436111989
11	1024	1	6.93147180559945	0

Fonte: O autor (2022).

Partindo dos dados apresentados na Figura 5, pode-se obter a função $y = -1,835620x + 12,487681$ de ajuste para os pontos $(\ln(r_i), \ln(N(r_i)))$. Dessa forma, o valor da dimensão fractal, D , desse contorno é, aproximadamente, 1,835620.

Calculando-se o coeficiente de determinação chega-se ao valor aproximado de 0.997434, portanto, trata-se de um bom ajuste em relação aos pontos.

Figura 3.12 – Gráfico: Aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* do Exemplo 3.5.



Fonte: O autor (2022).

O gráfico construído contendo os pontos e a função de ajuste obtida através do método dos mínimos quadrados está apresentado na Figura 3.12.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivos o conhecimento da Geometria Fractal, suas aplicações, sua importância, e a história do seu surgimento, além de noções de topologia com informações sobre conceitos dentro dessa área como métrica, espaços métricos, bolas, esferas e coberturas, trazendo uma base conceitual para as considerações no estudo da dimensão fractal de *Box-Counting*.

Apresentou-se o método dos mínimos quadrados como uma forma de calcular uma aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* utilizando um número finito de valores para o raio das bolas que formam coberturas da imagem cuja dimensão se quer calcular.

Então, a fim de ilustrar como é feita a aproximação da dimensão de *Box-Counting* por meio do *software MATLAB*, foram apresentados três exemplos. No primeiro foi calculado novamente a aproximação da dimensão de uma figura dada em um exemplo anterior, o qual havia sido feito de forma manual, obtendo ao final o valor aproximado de 1,880780 para a dimensão; no segundo foi calculada a aproximação da dimensão do contorno do território brasileiro, obtendo-se o valor 1,8842; e no terceiro exemplo foi feita a aproximação da dimensão fractal da fronteira territorial do município de Anápolis cuja dimensão obtida foi de 1,835620.

Além disso pode-se concluir que a dimensão fractal de *Box-Counting* possui diversas aplicações para o estudo de figuras que apresentam irregularidades e pode se inserir em diversas áreas de atuação, como geografia, engenharia, medicina e muitas outras.

Por fim, existem diversas possibilidades para a continuação desse estudo, tais como: desenvolver estudos envolvendo fractais gerados a partir de *softwares*; utilização de *softwares* como *Octave* para desenvolver cálculos de aproximação da dimensão fractal; desenvolver estudos sobre dimensão fractal utilizando derivação numérica; desenvolver estudos comparando a eficiência dos diversos métodos de aproximação da dimensão fractal, como o de *Box-Counting*, Hausdorff, Massa-Raio, Intersecção Acumulativa, *Dividers* e Bouligand-Minkowski; trabalhar os conceitos de fractal, geometria fractal e dimensão fractal, para o ensino básico; além de buscar aplicações da aproximação da dimensão fractal para outras áreas do saber como engenharia, biologia, medicina, arquitetura, entre outras.

REFERÊNCIAS

ASSIS, T. A. de et al. Geometria fractal: Propriedades e características de fractais ideais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 30, n. 2, p. 1–10, 2008.

AZEVEDO, T. S.; CHRISTOFOLETTI, A. L. H. Fractais em geografia: Conceitos e perspectivas. *Climatologia e Estudos da Paisagem*, v. 2, n. 2, 2007.

BACKES, A. R. *Implementação e comparação de métodos de estimativa da dimensão fractal e sua aplicação à análise e processamento de imagens*. Dissertação (Mestrado) — USP, São Carlos, abr. 2006.

BARBOSA, R. M. *Descobrendo a Geometria Fractal: Para Sala de Aula*. 3. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.

BARROSO, L. C. et al. *Cálculo Numérico (Com Aplicações)*. São Paulo, SP: Editora HARBRA Ltda., 1987.

EARTH, G. *Brasil*. 2022. Disponível em: <https://earth.google.com/>. Acesso em: 17 jan. 2022.

EUCLIDES. *Os elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FALCONER, K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. 2. ed. Universidade de St. Andrews, Reino Unido: Wiley, 2003.

GOIAS. *Goiás investe mais de R\$ 70 milhões no Daia*. Goás: [s.n.], 2022. Disponível em: [https://www.goias.gov.br/servico/43-economia/126234-goi%C3%A1s-investe-mais-de-r\\$-70-milh%C3%B5es-no-daia.html](https://www.goias.gov.br/servico/43-economia/126234-goi%C3%A1s-investe-mais-de-r$-70-milh%C3%B5es-no-daia.html). Acesso em: 15 fev. 2022.

IBGE. *10897. Mapa Mudo, Anápolis (GO)*. Rio de Janeiro, RJ: [s.n.], 2022. Disponível em: <https://portaldemapas.ibge.gov.br/portal.php#mapa10897>. Acesso em: 15 fev. 2022.

KLJATOV, A. *9 FOTOS PERFEITAS DE FLOCOS DE NEVE (E DICAS DE COMO FOTOGRAFÁ-LOS)*. 2017. Disponível em: <https://blogdaarquitectura.com/9-fotos-perfeitas-de-flocos-de-neve-e-dicas-de-como-fotografa-los/>. Acesso em: 20 dez. 2021.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1993.

MANDELBROT, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. Nova Iorque: W. H. Freeman and Company, 1977.

MARCIANO, E. *Fractais*. 2020. Disponível em: <https://escolaeducacao.com.br/fractais/>. Acesso em: 20 dez. 2021.

MATHWORKS. *MATLAB: A Linguagem da Computação Técnica*. 2022. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/index.html>. Acesso em: 16 fev. 2022.

MIGUEL, J. M. S. Movimiento browniano y geometría fractal: El ibex 35. *XIII Jornadas de ASEPUMA*, p. 1–12, 2005.

- MOISY, F. *boxcount*. 2022. Disponível em: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13063-boxcount>. Acesso em: 15 jan. 2022.
- NASCIMENTO, M. do; SILVA, S. de Carvalho Rutz da; MACIEL, N. A. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica. *VIDYA*, Santa Maria-RS, v. 32, n. 2, p. 113–132, 2012. ISSN 0104-270 X.
- RODRIGUEZ, J. et al. Diagnóstico fractal del ventriculograma cardiaco izquierdo - geometría fractal del ventriculograma durante la dinámica cardíaca. *Revista Colombiana de Cardiología*, v. 19, n. 1, p. 18–24, 2012.
- SAMPER, A.; HERRERA, B. Análisis de comparación fractal de la sagrada familia con las catedrales góticas. *Informes de la Construcción*, v. 67, 2015.
- SILVA, M. M. da; SOUZA, W. A. de. Dimensão fractal. *Revista Eletrônica de Matemática*, n. 2, p. 1–15, 2010.
- SIQUEIRA, R. *Introdução aos Fractais*. 2005. Disponível em: <http://www.fractarte.com.br/artigos.php>. Acesso em: 15 nov. 2022.
- SOUSA, M. *Fractais: Elementos matemáticos explicam o fenômeno*. 2013. Disponível em: <https://www.colegioweb.com.br/matematica/fractais.html>. Acesso em: 20 dez. 2021.
- VELAQUEZ, J. R. et al. Generalización fractal y euclidiana de arterias coronarias. *Revista Lasallista de Investigación*, v. 11, n. 2, p. 29–35, 2014.
- VELASQUEZ, J. O. R. et al. Caracterización geométrica euclidiana y fractal de células falciformes. *Nova : publicación científica en ciencias biomédicas*, n. 18, p. 43–52, 2020.
- VESTENA, L. R.; KOBAYAMA, M. A geometria fractal da rede de drenagem da bacia hidrográfica do caeté, alfredo wagner-sc. *Árvore*, v. 34, n. 4, p. 661–668, 2010.

Apêndices

APÊNDICE A – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Aqui são apresentadas as fórmulas para o cálculo da função do primeiro grau que melhor se ajusta a um conjunto de pontos por intermédio do método dos mínimos quadrados.

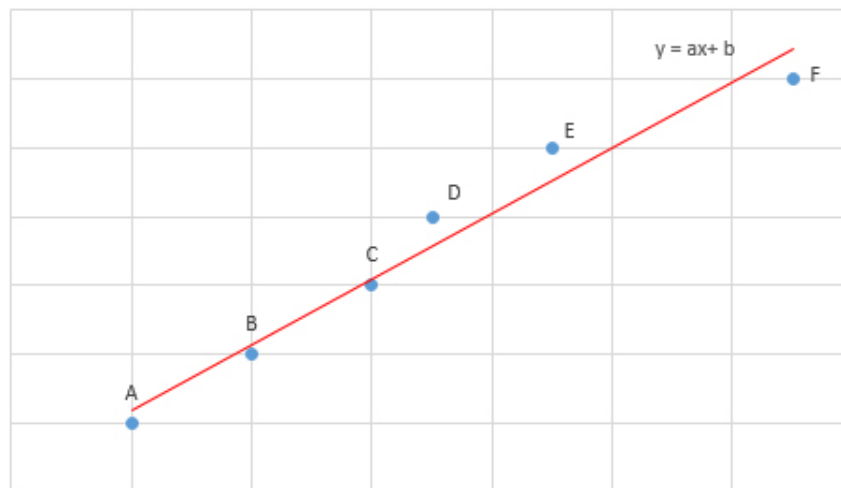
De acordo com Barroso et al. (1987), o método dos mínimos quadrados consiste em ajustar uma função a um conjunto finito de pontos (x_n, y_n) com $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq n$. Para isso são utilizadas duas fórmulas:

$$(i) \quad a = \frac{n \cdot \sum (x_i \cdot y_i) - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$(ii) \quad b = \frac{\sum y_i - (\sum x_i) \cdot a}{n}$$

A Figura A.1 apresenta um ajuste a partir desse método:

Figura A.1 – Gráfico: Aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting*.



Fonte: O autor (2022).

Para calcular o coeficiente de determinação (R^2) que diz a qualidade do ajuste da reta $y = a \cdot x + b$ (com a dado em (i) e b dado em (ii)) em relação aos pontos utiliza-se a seguinte fórmula:

$$(iii) \quad \frac{[\sum (x_i \cdot y_i) - (\sum x_i \cdot \sum y_i)/n]^2}{[\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n] \cdot [\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2/n]}$$

O valor obtido sempre estará entre 0 e 1 e quanto mais próximo de 1, melhor será a qualidade do ajuste da função em relação aos pontos.

APÊNDICE B – *MATLAB*

O *MATLAB* é um *software* voltado, principalmente para o cálculo numérico, sua linguagem se baseia nas operações entre matrizes e seu uso se estende para diversas áreas de atuação profissional. O *MATLAB* conta com um grande número de funcionalidades, desde cálculos simples até os mais complexos, plotagem de gráficos, criação de funções, processamento de dados e muitas outras (MATHWORKS, 2022).

Para realização deste trabalho foi utilizada uma licença gratuita de teste do *software MATLAB*. Além disso, recorreu-se ao programa *boxcount* desenvolvido por Moisy (2022) para obtenção do valor do raio das bolas e do menor número de bolas preenchidas após cada divisão do raio, representados, respectivamente, por r e n .

Também foram utilizados códigos para que o próprio programa fosse capaz de gerar os valores da dimensão fractal (através do método dos mínimos quadrados) e também o gráfico contendo os pontos $(\ln(r_i), \ln(n_i))$ e a reta que melhor se ajusta a eles.

A Figura B.1 contém os comandos que definem uma imagem como sendo a variável "c".

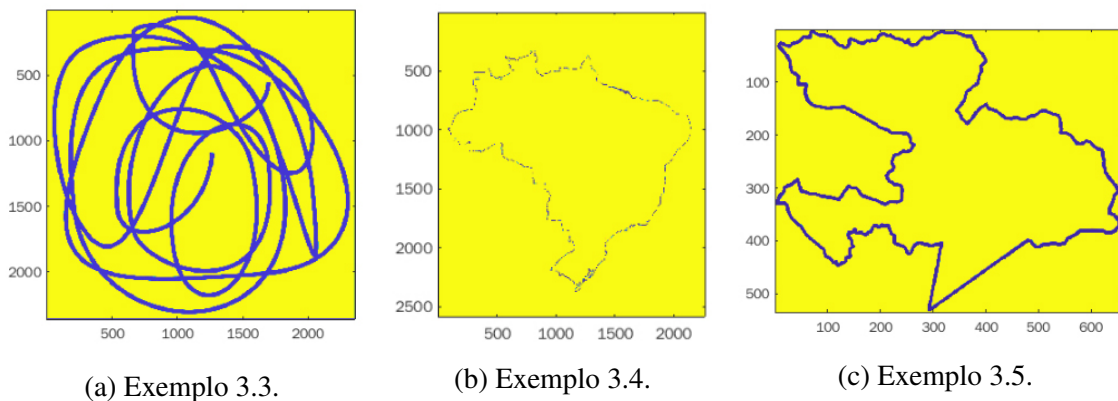
Figura B.1 – Código para leitura de figura.

```
c = imread('nome da figura.jpg');
image(c)
axis image
```

Fonte: O autor (2022)

Exemplo B.1. A Figura B.2 apresenta a leitura feita pelo *software MATLAB* das imagens dos exemplos da Seção 3.2 após a aplicação dos comandos da Figura B.1.

Figura B.2 – Figuras após leitura pelo *MATLAB*.



Fonte: O autor (2022).

A Figura B.3 apresenta o código que possibilita, a partir do programa *boxcount*, a contagem do número de bolas em relação a cada raio, com base na quantidade de pixels que compõem a figura original.

Figura B.3 – Código para a contagem do número de bolas em relação aos raios.

```
[n, r] = boxcount(c)
```

Fonte: O autor (2022)

Após a aplicação desse comando são geradas duas matrizes como se pode ver na Figura B.4.

Figura B.4 – Número de bolas (n) em função do raio (r) de uma Imagem.

```
n =
    225    113    57    29    15    8    4    2    1

r =
     1     2     4     8    16    32    64   128   256
```

Fonte: O autor (2022).

Os comandos dispostos na Figura B.5 foram elaborados para facilitar a construção das fórmulas, tabelas e gráficos que se fizessem necessários.

Figura B.5 – Códigos para definição de valores para construção de tabelas, fórmulas e gráficos.

```
a = log (r)           % Apresenta o logaritmo natural dos valores de "r".
b = log (n)           % Apresenta o logaritmo natural dos valores de "n".
d = sum (a);          % Apresenta o somatório dos valores de "a".
e = sum (b);          % Apresenta o somatório dos valores de "b".
f = sum (a.*b);       % Apresenta o somatório dos valores de "a" multiplicados pelos valores de "b".
m = sum (a.*a);       % Apresenta o somatório dos valores de "a" elevados ao quadrado.
q = numel (a);        % Apresenta o número de elementos de "a".
t = sum (b.*b);       % Apresenta o somatório dos valores de "b" elevados ao quadrado.
p = (d*e)/q;          % Apresenta o valor "d" multiplicado por "e" e o resultado dividido por "q".
u = (d^2)/q;          % Apresenta o valor "d" elevado ao quadrado, dividido por "q".
j = (e^2)/q;          % Apresenta o valor "e" elevado ao quadrado, dividido por "q".
g = 1 : 1 : q;        % Apresenta os valores de 1 até "q".
```

Fonte: O autor (2022).

A construção da tabela contendo os itens raio (r_i), número de bolas em função do raio $N(r_i)$, logaritmo natural do valor do raio ($\ln(r_i)$) e logaritmo natural do valor do número de bolas

em função do raio ($\ln(N(r_i))$) se deu por meio dos códigos presentes na Figura B.6 (um exemplo é a Tabela 6).

Figura B.6 – Código para construção de tabela com as variáveis dadas.

```
tabela = table (g', r', n', a', b');
tabela.Properties.VariableNames = {'i',
'r_i', 'N(r_i)', 'ln(r_i)', 'ln(N(r_i))'}
```

Fonte: O autor (2022)

Tabela 6 – Número de bolas em função do raio.

i	r_i	N(r_i)	ln(r_i)	ln(N(r_i))
1	1	335039	0	12.7220022219416
2	2	85693	0.693147180559945	11.3585264209698
3	4	21928	1.38629436111989	9.99551963798262
4	8	5494	2.07944154167984	8.61141186665522
5	16	1394	2.77258872223978	7.23993259132047
6	32	357	3.46573590279973	5.87773578177964
7	64	99	4.15888308335967	4.59511985013459
8	128	30	4.85203026391962	3.40119738166216
9	256	9	5.54517744447956	2.19722457733622
10	512	4	6.23832462503951	1.38629436111989
11	1024	1	6.93147180559945	0

Fonte: O autor (2022).

A Figura B.7 apresenta a fórmula para o cálculo da dimensão fractal de *Box-Counting* a partir do método dos mínimos quadrados. Para o cálculo do coeficiente angular (nesse caso A) e do coeficiente linear (nesse caso B) são utilizados os códigos da Figura B.5. Também estão presentes na Figura B.7 as variáveis L e N , em que L é a variação com intervalo de uma unidade do menor valor para a variável a (que representa $\ln(r_i)$) até o maior valor de a mais 1 e N é a função do primeiro grau obtida pelo método dos mínimos quadrados que melhor se ajusta aos pontos (a, b) (que representam $(\ln(r_i), \ln(N(r_i)))$).

Figura B.7 – Código para cálculo da dimensão fractal pelo método dos mínimos quadrados.

```
A = ((q * f) - (d * e)) / ((q * m) - (d^2));
B = (e - (d * A)) / (q);

L = [min(a):1:(max(a)+1)];
N = (A * L) + B;
```

Fonte: O autor (2022).

Para a construção da função que determina o valor do coeficiente de determinação (Figura B.8), em que é verificado o quão bom é um ajuste da função em relação aos pontos (a, b) , foram utilizados os comandos presentes na Figura B.5.

Figura B.8 – Código para o cálculo do coeficiente de determinação.

```
coeficientededeterminacao = ((f-p)^2) / ((m - u) * (t - j))
```

Fonte: O autor (2022).

Os comandos inseridos na Figura B.9 são utilizados para plotar um gráfico contendo os pontos (a, b) e a reta N com a finalidade de verificar, visualmente, o ajuste da curva em relação aos pontos.

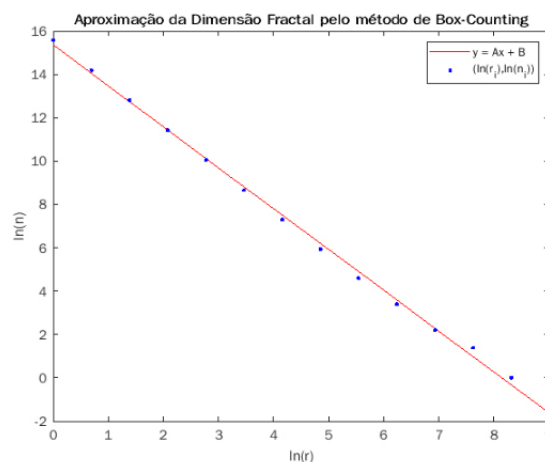
Figura B.9 – Código para plotagem de gráfico.

```
plot (L,N,"-r")
hold on
plot(a,b,".b")
title("Aproximação da Dimensão Fractal pelo método de Box-Counting")
legend ("y = Ax + B", "(ln(r_i),ln(n_i))")
xlabel( 'ln(r)' )
ylabel( 'ln(n)' )
hold off
```

Fonte: O autor (2022).

Após o uso desses comandos (Figura B.9), gera-se um gráfico semelhante ao apresentado na Figura B.10 e os valores "A", "B" e "coeficientededeterminacao" são exibidos na aba *workspace* e representam, nessa ordem, os valores do coeficiente angular, do coeficiente linear e do coeficiente de determinação da função de ajuste, obtidos através do método dos mínimos quadrados.

Figura B.10 – Gráfico de exemplificação.



Fonte: O autor (2022).

APÊNDICE C – EXEMPLO 3.3

Neste apêndice apresentam-se os códigos utilizados para o cálculo da aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* do Exemplo 3.3, a partir do *MATLAB*.

Figura C.1 – Códigos para o Exemplo 3.3.

```

c = imread('ex2bc001.jpg');
image(c)
axis image

%%

[n, r] = boxcount(c)

%%

a = log (r)
b = log (n)
d = sum (a);
e = sum (b);
f = sum (a.*b);
m = sum (a.*a);
q = numel (a);
t = sum (b.*b);
p = (d*e)/q;
u = (d^2)/q;
j = (e^2)/q;
g = 1 : 1 : q;

%%

tabela = table (g', r', n', a', b')
tabela.Properties.VariableNames = {'i',
'r_i', 'N(r_i)', 'ln(r_i)', 'ln(N(r_i))'}

%%

A = ((q * f) - (d * e))/((q * m)-(d^2));
B = (e-(d * A))/(q);

L = [min(a):1:(max(a)+1)];
N = (A * L) + B;

coeficientededeterminacao = ((f-p)^2) / ((m - u) * (t - j))

%%

plot (L,N,"-r")
hold on
plot(a,b,".b")
title("Aproximação da Dimensão Fractal pelo método de Box-Counting")
legend ("y = Ax + B", "(ln(r_i),ln(n_i))")
xlabel( 'ln(r)' )
ylabel( 'ln(n)' )
hold off

```

Fonte: O autor (2022).

APÊNDICE D – EXEMPLO 3.4

Neste apêndice apresentam-se os códigos utilizados para o cálculo da aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* do Exemplo 3.4, a partir do *MATLAB*.

Figura D.1 – Códigos para o Exemplo 3.4.

```

c = imread('brasil.jpg');
image(c)
axis image

%%

[n, r] = boxcount(c)

%%

a = log (r)
b = log (n)
d = sum (a);
e = sum (b);
f = sum (a.*b);
m = sum (a.*a);
q = numel (a);
t = sum (b.*b);
p = (d*e)/q;
u = (d^2)/q;
j = (e^2)/q;
g = 1 : 1 : q;

%%

tabela = table (g', r', n', a', b')
tabela.Properties.VariableNames = {'i',
'r_i', 'N(r_i)', 'ln(r_i)', 'ln(N(r_i))'}

%%

A = ((q * f) - (d * e))/((q * m)-(d^2));
B = (e-(d * A))/(q);

L = [min(a):1:(max(a)+1)];
N = (A * L) + B;

coeficientededeterminacao = ((f-p)^2) / ((m - u) * (t - j))

%%

plot (L,N,"-r")
hold on
plot(a,b,".b")
title("Aproximação da Dimensão Fractal pelo método de Box-Counting")
legend ("y = Ax + B", "(ln(r_i),ln(n_i))")
xlabel( 'ln(r)' )
ylabel( 'ln(n)' )
hold off

```


APÊNDICE E – EXEMPLO 3.5

Neste apêndice apresentam-se os códigos utilizados para o cálculo da aproximação da dimensão fractal de *Box-Counting* do Exemplo 3.5, a partir do *MATLAB*.

Figura E.1 – Códigos para o Exemplo 3.5.

```

c = imread('anapolis.jpg');
image(c)
axis image

%%

[n, r] = boxcount(c)

%%

a = log (r)
b = log (n)
d = sum (a);
e = sum (b);
f = sum (a.*b);
m = sum (a.*a);
q = numel (a);
t = sum (b.*b);
p = (d*e)/q;
u = (d^2)/q;
j = (e^2)/q;
g = 1 : 1 : q;

%%

tabela = table (g', r', n', a', b')
tabela.Properties.VariableNames = {'i',
'r_i', 'N(r_i)', 'ln(r_i)', 'ln(N(r_i))'}

%%

A = ((q * f) - (d * e))/((q * m)-(d^2));
B = (e-(d * A))/(q);

L = [min(a):1:(max(a)+1)];
N = (A * L) + B;

coeficientededeterminacao = ((f-p)^2) / ((m - u) * (t - j))

%%

plot (L,N,"-r")
hold on
plot(a,b,".b")
title("Aproximação da Dimensão Fractal pelo método de Box-Counting")
legend ("y = Ax + B", "(ln(r_i),ln(n_i))")
xlabel( 'ln(r)' )
ylabel( 'ln(n)' )
hold off

```


ÍNDICE REMISSIVO

B

Benoit Mandelbrot, 24

Bola Aberta, 30

Bola Fechada, 31

Box-Counting, 33

C

Cobertura, 32

D

Dimensão euclidiana, 23

Dimensão fractal, 33

Dimensão fractal de *Box-Counting*, 34

E

Esfera, 31

Espaço métrico, 30

F

Fractal, 33

G

Geometria fractal, 23

M

MATLAB, 40

Método dos mínimos quadrados, 37

Métrica, 29